מהן נקודות הקיצון של $f_{(x,y)} = x^2 + 3y^2 + 2y$ בתחום $x^2 + y^2 = 1$

פתרון:

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 & => \quad x = 0 \\ f_y = 6y + 2 = 0 & => \quad y = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad => \quad \left(0, -\frac{1}{3}\right) \quad suspected$$

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{xy} = 0 \qquad f_{yy} = 6$$

$$\Delta = 12 > 0 \quad , \quad f_{xx} = 2 > 0 \quad => \quad \left(0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \quad min$$

מצאנו נקודת מינימום "טבעית" של הפונקציה, והיא נמצאת בתחום המעגלי הנתון.

מסביב לנקודה זו הפונקציה גובהת, ולכן ערכה המרבי בתחום חייב להתקבל <u>על</u> המעגל (מחוץ למעגל הפונקציה ממשיכה לגבוה אבל זה כבר לא מעניין אותנו).

נציב $x = \sqrt{1-y^2}$ כדי להבטיח הימצאות על המעגל, ונקבל את f כתלות במשתנה y בלבד:

$$f_{\left(\sqrt{1-y^2}\ ,\ y\right)} \;=\; 1 - y^2 + 3y^2 + 2y \;=\; 2y^2 + 2y + 1$$

זוהי פרבולה "מחייכת" ואם כך קודקודה מהווה מינימום:

$$y_k = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad => \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{is the minimum } point\ that\ f\ obtains\ on\ the\ circle$$

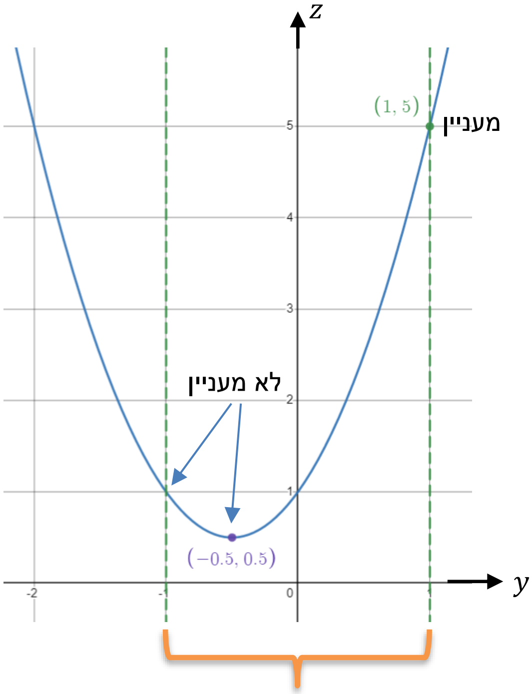
אבל כפי שהוסבר קודם, אנו מחפשים מקסימום על המעגל ולא מינימום.

הפרבולה הנ"ל "מחייכת", ולכן נקודת המקסימום שאנו מחפשים תתקבל בקצה התחום המותר ל- y : $-1 \le y \le 1$

הפרבולה מתארת כיצד משתנה f כתלות ב- y תוך שאנו נעים על המעגל הנתון.

הערך המרבי שמקבלת f על המעגל הוא 5, וערך זה מתקבל כאשר $y = 1$.

נקודת המקסימום של f בתחום הנתון היא אם כך: $(0,1,5)$



התחום הרלוונטי ל- y