מהו טור מקלורן של $k(x)=\int_{1}^{1+x}\frac{\ln t}{-1+t}dt$ (עליך לפתח את $\ln t$ לטור טיילור סביב $t=1$)?

זהו אומנם אינטגרל לא תקין מסוג 2 (גבול תחתון מאפס מכנה), אבל ברור שהוא מתכנס אם קיים טור חזקות מתכנס אשר שווה לו.

יש לבחור תשובה אחת:

- a. $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\ldots$
- b. $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots$
- c. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$
- d. $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$

$$\ln(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots=\sum(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\qquad 0<x\le 2$$

$$\frac{\ln(t)}{t-1}=1-\frac{1}{2}(t-1)+\frac{1}{3}(t-1)^2-\frac{1}{4}(t-1)^3+\cdots=\sum(-1)^{n-1}\frac{(t-1)^{n-1}}{n}\qquad 0<t\le 2$$

$$\int\frac{\ln(t)}{t-1}dt={\color{red}t}-\frac{1}{4}(t-1)^2+\frac{1}{9}(t-1)^3-\frac{1}{16}(t-1)^4+\cdots=t+\sum_{2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(t-1)^n}{n^2}\qquad 0<t\le 2$$

$$\int_{1}^{1+x}\frac{\ln(t)}{t-1}dt={\color{red}1+x}-\frac{1}{4}(1+x-1)^2+\frac{1}{9}(1+x-1)^3-\frac{1}{16}(1+x-1)^4+\cdots-({\color{red}1})=$$

$$={\color{red}x}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4+\cdots=\sum(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}\qquad -1<x\le 1$$

מבט גראפי: