מהם שלושת האיברים הראשונים שאינם אפס בפיתוח לטור מקלורן של $\ln(\cos x)$?

ראשית, פונקציה זו מוגדרת רק עבור $0 < \cos x$, ז"א רק עבור

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

הליכה בדרך ה"רגילה" תהא מייגעת, והטריק פה הוא לזהות ש-

$$\ln|\cos x| = -\int \tan x \, dx$$

ואז למצוא את טור מקלורן של $\tan x$ (באמצעות חילוק ארוך) ולעשות לו אינטגרציה.

יש לבחור תשובה אחת:

- a. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{45}x^4 + \ldots$
- b. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + \ldots$
- c. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \ldots$
- d. $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + \ldots$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$$\ln|\cos x| + C = -\int \tan x \, dx$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \ldots}{1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \ldots} =$$

$$x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{15} \cdot x^5 + \frac{17}{315} \cdot x^7 + \cdots$$

$$x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \cdots \quad \Big| \quad 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \cdots$$

$$- \quad x - \frac{1}{2!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^5 - \frac{1}{6!} \cdot x^7 + \cdots$$

$$\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{30} \cdot x^5 + \frac{1}{840} \cdot x^7 - \cdots$$

$$- \quad \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^5 + \frac{1}{72} \cdot x^7 - \frac{1}{720} x^9 + \cdots$$

$$\frac{2}{15} \cdot x^5 - \frac{4}{315} \cdot x^7 + \cdots$$

$$- \quad \frac{2}{15} \cdot x^5 - \frac{1}{15} \cdot x^7 + \cdots$$

$$\frac{17}{315} \cdot x^7 + \cdots$$

$$\int \tan x \, dx = \int \left(x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{15} \cdot x^5 + \frac{17}{315} \cdot x^7 + \cdots \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + \frac{17}{2520}x^8 + \cdots$$

$$\ln|\cos x| + C = -\int \tan x \, dx = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 - \frac{17}{2520}x^8 - \cdots$$

מהצבת $x = 0$ מתקבל $C = 0$ ואנו נשארים עם:

$$\ln|\cos x| = -\int \tan x \, dx = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 - \frac{17}{2520}x^8 - \cdots$$

באיור למטה מוצגים הפונקציה $\ln|\cos x|$ וטור מקלורן שלה (רק שלושה איברים ראשונים).
הפונקציה $\ln|\cos x|$ מחזורית, אך הטור שלה מתכנס רק עבור $-1 < x < 1$.
לו היו נלקחים כאן איברים רבים של הטור, היה הגרף שלו מופיע רק בתחום $-1 < x < 1$, אך נלקחו כאן שלושה איברים ראשונים שלו בלבד ולכן הוא "פולש" אל מחוץ לתחום הנ"ל. על כל פנים, בתוך התחום הנ"ל חופפים כמעט גרף הטור וגרף הפונקציה **למרות** שנלקחו כאן רק שלושה איברים ראשונים שלו.