$$\int_0^3 \frac{2+x}{\sqrt{\sin x}}\,dx \quad Converges?$$

$$\frac{2+x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{2+x}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}$$

נניח שהאינטגרנד הנתון מתקרב לציר ה- y "מספיק מהר" .
נחפש אינטגרנד שיהווה לו גג ועדיין יתקרב לציר ה- y "מספיק מהר".

כאשר $x \to 0$ מתקיים $\frac{\sin x}{x} \to 1$, אז נחליף ביטוי זה בקבוע שהינו קטן מ- 1 (חצי למשל) ובכך ניצור גג לאינטגרנד הנתון:

$$\boldsymbol{\frac{2+x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{2+x}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}} < \frac{2+x}{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}} = 2\,\frac{2+x}{\sqrt{x}}}$$

בתחום האינטגרציה הנתון $(0 \le x \le 3)$ מקבל המונה ערך מרבי השווה ל- 5 (כאשר $x = 3$), אז נציב במונה את המספר 5 ובכך נפשט את האינטגרציה עוד יותר. ניצור תכלס גג לגג:

$$\frac{2+x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{2+x}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}} < \frac{2+x}{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}} = 2\,\frac{2+x}{\sqrt{x}} \le 2\,\frac{5}{\sqrt{x}}$$

נראה עכשיו שאפילו אינטגרל הגג של הגג מתכנס:

$$2\int_0^3 \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx = 20 \lim_{a\to0^+}\int_a^3 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 20 \lim_{a\to0^+}\left[\sqrt{x}\right]_a^3 = 20 \lim_{a\to0^+}\left[\sqrt{3}-\sqrt{a}\right] = 20\sqrt{3}$$

אינטגרל הגג (של הגג) מתכנס, אז האינטגרל הנתון **לבטח** מתכנס.