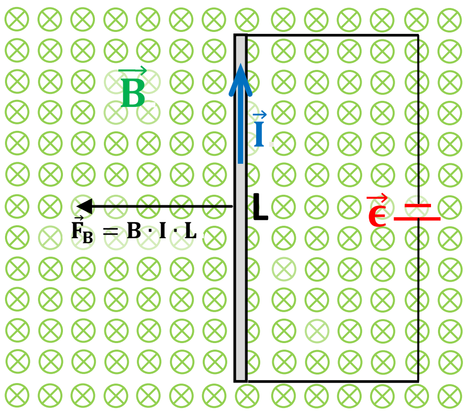
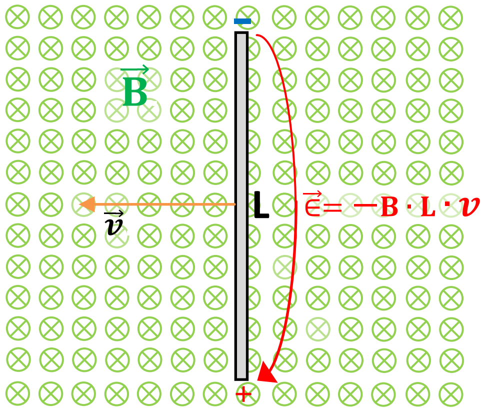
סיכום שיעור – כא"מ מושרה



בשיעור הקודם דנו בכוח המגנטי הפועל על תיל נושא זרם אשר שרוי בשדה מגנטי, ובפרט במקרה שבו התיל ישר והשדה המגנטי אחיד (איור משמאל).
מבלי לומר זאת במפורש, הסברנו בעצם את העיקרון שמאחורי פעולת המנוע החשמלי: דרך תיל L השרוי בשדה מגנטי B מועבר זרם I (באמצעות חיבור קצות התיל למקור כא"מ ϵ כמובן) וכתוצאה מכך פועל עליו כוח מגנטי F_B=BIL.
אם התיל אינו מקובע למקומו הוא ינוע כמובן, והרי לכם מנוע חשמלי.

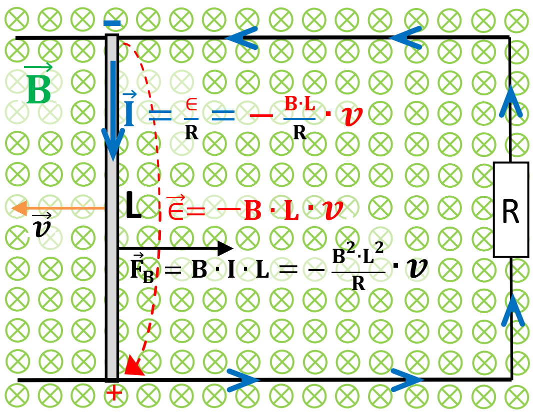
בשיעור זה נלמד על תופעה הפוכה - תופעת הדינמו: כוח חיצוני מניע תיל השרוי בשדה מגנטי, וכתוצאה מכך מושרה בתיל כא"מ אשר הופכו למקור מתח.
למקור מתח זה אפשר לחבר צרכן כגון נורה, גוף חימום או כל מכשיר חשמלי אחר.

כא"מ מושרה



כאשר תיל מוליך נע בשדה מגנטי, מושרה בו כא"מ (ϵ) והוא "הופך לסוללה".
אם התיל ישר ונע במאונך לציר האורך שלו ובמאונך לשדה מגנטי אחיד, הכא"מ המושרה בו יהיה $\in = -\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{v}$ כאשר L הוא אורך התיל, B הוא השדה המגנטי שבו הוא נע ו-v היא מהירות תנועתו. כיצד נקבע את קוטביות הכא"מ המושרה?
בעזרת "כלל יד ימין לכיוון הכוח המגנטי הפועל על מטען אשר נע בשדה מגנטי":
נפנה את האצבעות בכיוון השדה המגנטי $\vec{B}$ כאשר האגודל פונה בכיוון תנועת התיל $\vec{v}$. כל מטען חיובי שבתיל יחוש כוח מגנטי שכיוונו "החוצה מכף היד" (כלפי מטה במקרה המוצג באיור), וכל מטען שלילי שבתיל יחוש כוח מגנטי שכיוונו "לתוך כף היד" (כלפי מעלה במקרה המוצג באיור). כתוצאה מכך יתנקזו המטענים החיוביים בקצה אחד של התיל, והשליליים בקצהו השני.

סוגרים מעגל



כעת מותקנת תחת התיל מסילת מתכת אשר לאורכה הוא מחליק ללא חיכוך ובמהירות קבועה v_0 (תוך קיום מגע חשמלי רציף עימה). ברגע t=0 נסגר מעגל חשמלי באמצעות חיבורו של נגד R בין קצות המסילה (לשם הפשטות נניח שהתנגדותם החשמלית של המסילה ושל התיל אפסית). במעגל זורם כעת זרם חשמלי שעוצמתו $I = \frac{\in}{R} = \frac{-B \cdot L \cdot v}{R}$ וכיוונו ע"פ קוטביות הכא"מ המושרה (נגד השעון במקרה המוצג באיור). כעת אנו דנים כבר בתיל L נושא זרם I אשר שרוי בשדה מגנטי אחיד B, ולפי מה שלמדנו בשיעור הקודם פועל עליו כוח מגנטי שגודלו F_B=BIL וכיוונו נקבע ע"פ "כלל יד ימין לכיוון הכוח המגנטי הפועל על תיל נושא זרם השרוי בשדה מגנטי" (ימינה במקרה המוצג באיור). אך אין הכרח להשתמש כאן בכלל הזה, כי הכוח המגנטי F_B פועל בוודאות נגד כיוון התנועה של התיל. מדוע? בשל חוק שימור האנרגיה: אילו היה פועל בכיוון התנועה של התיל, היה מאיצו בכיוון תנועתו ומעניק לו אנרגיה קינטית הולכת וגדלה "יש מאין". דחיפה ראשונית של התיל, והיה לנו גנראטור שפועל לנצח ללא צורך בדלק, אבסורד מוחלט, וזוהי גם הסיבה לסימן (-) בנוסחת הכא"מ המושרה: קוטביות הכא"מ המושרה היא תמיד כזו שתזרים את הזרם בכיוון כזה שיגרום לכוח המגנטי לפעול נגד כיוון התנועה, ז"א כנגד המהירות $\vec{v}$.
בחזרה לענייננו: התיל נע במהירות קבועה v_0 כשלפתע, ברגע t=0, החל לפעול עליו כוח מגנטי F_B=BIL במנוגד לכיוון תנועתו.
כתוצאה מכך התיל מאט, הכא"מ המושרה בו פוחת, הזרם דרכו נחלש, הכוח המגנטי המאט אותו נחלש, בלימתו נחלשת.
לאחר זמן רב תהיה מהירותו של התיל אפסית וכמוה גם הכוח המגנטי המאט אותו, אך התיל לא יעצור לעולם!
להלן פיתוח הקשר שבין הכוח המגנטי המאט את התיל לבין מהירות התיל:

$$\boldsymbol{F_B} = B \cdot I \cdot L = B \cdot \frac{\in}{R} \cdot L = B \cdot \frac{-B \cdot L \cdot v}{R} \cdot L \quad => \quad \boldsymbol{F_B} = -\frac{B^2 \cdot L^2}{R} \cdot \boldsymbol{v}$$

התאוצה (תאוטה, בלימה) של התיל כתלות במהירותו תהיה: $\boldsymbol{a} = \frac{F_B}{m} = -\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m} \cdot \boldsymbol{v}$, כאשר m היא מסת התיל.
אנו רואים שבהתחלה כאשר המהירות גבוהה חזקה גם הבלימה, אך עם חלוף הזמן כאשר פוחתת המהירות נחלשת גם הבלימה.
אנו דנים כאן בתנועה **שאינה שוות תאוצה**, ולכן לא נוכל להשתמש בנוסחאות הקינמאטיקה כדי לענות על שאלות כגון "היכן יהיה התיל כעבור זמן מסוים" או "מה תהיה מהירותו של התיל כעבור זמן מסוים".

הדינמו

נדון כעת במקרה אחר, שבו תנאי ההתחלה והסיום הפוכים לאלה שהיו במקרה הקודם:

התיל נמצא במנוחה כאשר לפתע, ברגע t=0, מתחיל לפעול עליו כוח חיצוני **קבוע** F_{EXT}. מה יקרה כעת?

ברגע t=0 התיל עדיין במנוחה ולכן לא מושרה בו כא"מ, לא עובר דרכו זרם ולא פועל עליו כוח מגנטי.

תאוצתו ברגע זה מרבית: $a_{max}=F_{EXT}/m$, אך היא פוחתת בהדרגה תוך שהוא רוכש מהירות ← כא"מ ← זרם ← כוח מגנטי כנגד כיוון תנועתו. לאחר זמן רב ישתווה כמעט הכוח המגנטי F_B לכוח החיצוני F_{EXT}, והכוח השקול הפועל על התיל כמעט ויתאפס, ז"א תאוצתו של התיל כמעט ותתאפס. מהירותו כמעט ותפסיק לגדול, תוך שהיא מתכנסת אל ערך מרבי מסוים.

באיור הבא מתואר התהליך בשלושה זמנים שונים:

א') בהתחלה, t=0, כשהתיל עדיין במנוחה והכוח החיצוני הקבוע F_{EXT} אך זה החל לפעול. התאוצה ברגע זה מרבית: $a_{max}=\frac{F_{EXT}}{m}$

ב') כעבור זמן t_1 כלשהו, כאשר התיל הספיק כבר לפתח מהירות ← כא"מ ← זרם ← כוח מגנטי כנגד כיוון תנועתו.

ג') כעבור זמן רב מאוד, כאשר התאוצה שואפת לאפס והמהירות שואפת לערכה המרבי : $v_{max}=\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}$

t→∞

$v\to v_{max}=\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}$

$a\to 0$

$t=t_1$

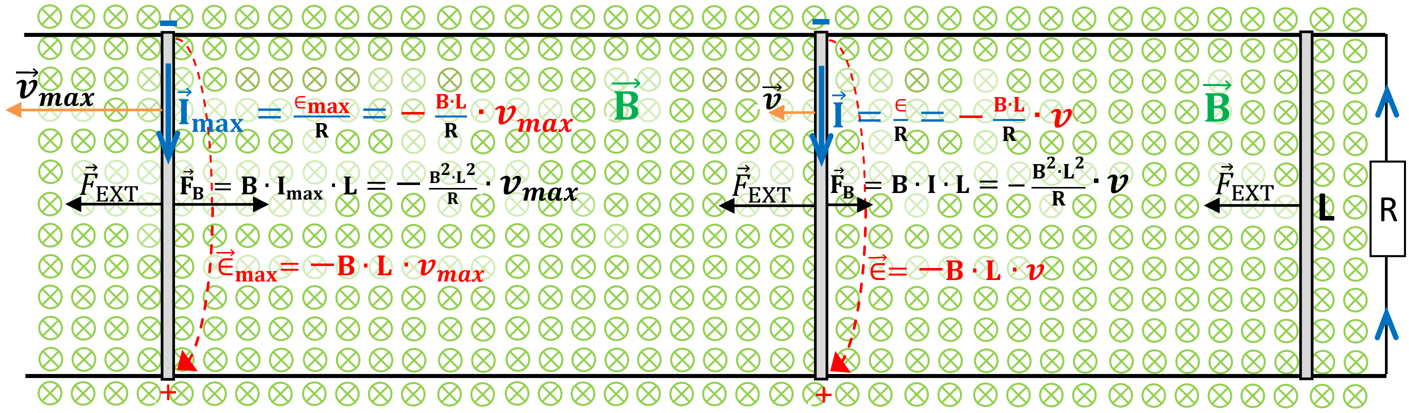
$v=v_{(t_1)}$

$a_{(t_1)}=\frac{F_{EXT}-F_{B(t_1)}}{m}=\frac{F_{EXT}}{m}-\frac{B^2\cdot L^2}{m\cdot R}\cdot v_{(t_1)}$

t=0

$v=0$

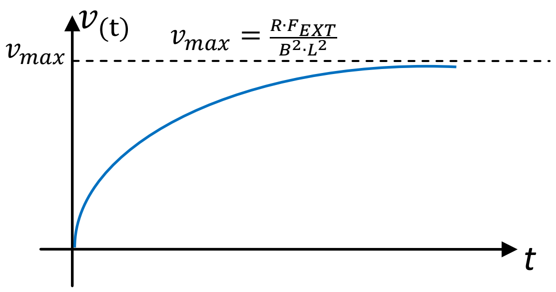
$a_{max}=\frac{F_{EXT}}{m}$

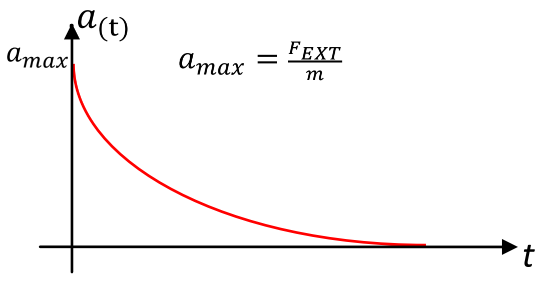


המהירות המרבית מתקבלת לאחר זמן רב, כאשר הכוח המגנטי F_B משתווה (כמעט) בגודלו לכוח החיצוני F_{EXT}:

$$\vec{a}=0\quad=>\quad\sum\vec{F}=0\quad=>\quad F_B=F_{EXT}\quad=>\quad\frac{B^2\cdot L^2}{R}\cdot v=F_{EXT}\quad=>\quad v_{max}=\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}$$

גרפים איכותיים של תאוצה/זמן ומהירות/זמן מוצגים להלן:





למתעניינים בלבד, פיתוח פונקצית המהירות/זמן אשר מתוארת איכותית בגרף השמאלי:

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}\quad=>\quad F_{EXT}-F_B=ma\quad=>\quad F_{EXT}-\frac{B^2\cdot L^2}{R}\cdot v=m\cdot\frac{dv}{dt}\quad=>\quad-\left(v-\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}\right)dt=m\cdot dv\quad=>$$

$$=>\quad-\frac{1}{m}\cdot dt=\frac{dv}{v-\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}}\quad=>\quad-\frac{1}{m}\cdot\int_0^t dt=\int_{v(0)}^{v(t)}\frac{dv}{v-\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}}\quad=>\quad-\frac{1}{m}\cdot t=\ln\left|v-\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}\right|_{v(0)}^{v(t)}\quad=>$$

$$=>\quad-\frac{1}{m}\cdot t=\ln\frac{v_{(t)}-\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}}{v_{(0)}-\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}}\quad=>\quad\left(v_{(0)}-\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{m}\cdot t}=v_{(t)}-\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}\quad=>$$

0 במקרה שלנו

$$=>\quad v_{(t)}=\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}+\left(v_{(0)}-\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{m}t}\quad=>\quad\boxed{v_{(t)}=\frac{R\cdot F_{EXT}}{B^2\cdot L^2}\left(1-e^{-\frac{1}{m}t}\right)}$$