אם הטורים $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים, האם $\sum a_n \cdot b_n$ בהכרח מתכנס?

תשובה:

לא, ניקח לדוגמה את שני הטורים $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/2}}$ ו- $\sum b_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}$.
אלה הם טורים מתחלפים שאבריהם מתכנסים לאפס ואם כך הם מתכנסים, על פי מבחן לייבניץ.

עם זאת, הטור המתקבל מהכפלתם בהתאמה של איברי הטורים הנ"ל אינו מתחלף.
איבריו מתכנסים אומנם לאפס, אך לא מספיק מהר (יודעים זאת על פי מבחן p).

$$\begin{aligned}\sum a_n &= \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/2}} \\ \sum b_n &= \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}\end{aligned} \quad => \quad \sum a_n \cdot b_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/2}} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}} = \sum \frac{1}{n^{5/6}} \quad p<1 \quad => \quad diverges$$

אילו ערכים של x מקיימים $\boldsymbol{\sin(x)} \approx \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{6}}$ בדיוק העולה על 10^{-5} ?

פיתרון:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

ע"פ מבחן לייבניץ לטור מתחלף - האיבר הראשון בשארית גדול בערכו המוחלט מהשארית, ז"א מהשגיאה.
כאן האיבר הראשון בשארית הוא $\frac{x^5}{5!}$, לכן עליו להיות קטן בערכו המוחלט מהשגיאה המותרת (או לכל היותר שווה לה).

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| \le 10^{-5} \quad => \quad |x^5| \le 5! \cdot 10^{-5} \quad => \quad |x| \le \sqrt[5]{5! \cdot 10^{-5}} \approx 0.26 \quad => \quad -0.26 \le x \le 0.26$$

ככל ש- x גדול יותר (בערכו המוחלט), השגיאה גדולה יותר - פוחת הדיוק.
כאשר $x=0$ אין שגיאה. כאשר $x = \pm 0.26$ השגיאה היא 10^{-5} בקירוב.

$$\begin{aligned}\sin(0.26) &= 0.2570806 \\ 0.26 - \frac{0.26^3}{3!} &= 0.2570707\end{aligned} \quad => \quad |Error| = 9.9 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$

$$\begin{aligned}\sin(-0.26) &= -0.2570806 \\ -0.26 - \frac{(-0.26)^3}{3!} &= -0.2570707\end{aligned} \quad => \quad |Error| = 9.9 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$

מהו סכום הטור $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{45\sqrt{3}} \ldots$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots \quad => \quad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{45\sqrt{3}} \ldots$$

אם נציב $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ בטור של $\arctan(x)$ נקבל את הטור הנתון בשאלה, לכן התשובה היא

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{45\sqrt{3}} \ldots = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$