רשום את טור מקלורן של הפונקציה הבאה ומצא את תחום ההתכנסות שלו:

$$f_{(x)} = ln\sqrt{1+x}$$

פיתרון:

בדף הנוסחאות רשום כי

$$ln(1+x) = \sum(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

כעת

$$f_{(x)} = ln(1+x)^{1/2} = \frac{1}{2}ln(1+x) = \frac{1}{2}\sum(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

אם כך, טור מקלורן של הפונקציה הנתונה הינו

$$ln\sqrt{1+x} = \sum(-1)^{n+1}\frac{x^n}{2n} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \cdots$$

בעזרת מבחן המנה נמצא כעת את תחום ההתכנסות של טור זה

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{2n}$$

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (-1)^1\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\cdot\frac{2n}{x^n} = -\frac{n}{n+1}x$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{n}{n+1}x\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot|x| = |x|$$

על פי מבחן המנה, הטור מתכנס עבור $\rho < 1$:

$$\rho < 1 \quad => \quad |x| < 1 \quad => \quad -1 < x \le 1$$

לסיכום, תחום ההתכנסות של הטור הוא $-1 < x \le 1$