

האם הטור  $\sum \left( \sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n+1} \right)$  מתכנס?

פיתרון:

$$\sum \left( \sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n+1} \right) = \sin \frac{1}{2} - \sin \frac{1}{3} + \sin \frac{1}{4} - \sin \frac{1}{5} + \sin \frac{1}{6} - \sin \frac{1}{7} + \dots$$

זהו טור מתחלף שאיבריו מתכנסים לאפס, לכן הוא מתכנס לפי מבחן לייבניץ לטורים מתחלפים.

מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור  $\sum \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^n$

פיתרון ע"פ מבחן המנה:

$$a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^n$$

$$a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1) \cdot (3n+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} x^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1) \cdot (3n+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} x^{n+1} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1) x^n} = \frac{3n+2}{2n+2} \cdot x$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3n+2}{2n+2} \cdot x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+2} \cdot |x| = \frac{3}{2} |x|$$

התנאי להתכנסות של הטור הינו  $\rho < 1$ :

$$\rho < 1 \Rightarrow \frac{3}{2} |x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$$

רדיוס ההתכנסות של הטור הנתון הוא  $\frac{2}{3}$  אם כך (מחציתו של תחום ההתכנסות).