

האם הטור $\sum \frac{\sqrt{n} \sin(\frac{1}{n})}{n+1}$ מתכנס?

פיתרון:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2} + n^{1/2}} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

בעצם השאלה כאן היא אם $\frac{1}{n^{3/2}}$ מתכנס לאפס מספיק מהר, והתשובה היא כן - על פי מבחן p .

עבור אילו ערכים של a הטור $\sum \frac{1}{a^{\ln(n)}}$ מתכנס?

פיתרון באמצעות מבחן p :

$$y = a^{\ln(n)} \Rightarrow \ln y = \ln(n) \ln(a) \Rightarrow y = e^{\ln(n) \ln(a)} = (e^{\ln(n)})^{\ln(a)} = n^{\ln(a)}$$

$$\frac{1}{a^{\ln(n)}} = \frac{1}{n^{\ln(a)}} \Rightarrow 1 < \ln(a) \text{ (p test)} \Rightarrow \ln(e) < \ln(a) \Rightarrow e < a$$

עבור אילו ערכים של p הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln(n)]^p}$ מתכנס?

פיתרון באמצעות מבחן האינטגרל ואז מבחן p :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x[\ln(x)]^p} dx \rightarrow \begin{matrix} u = \ln(x) \\ du = \frac{dx}{x} \end{matrix} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u^p} du \Rightarrow 1 < p$$