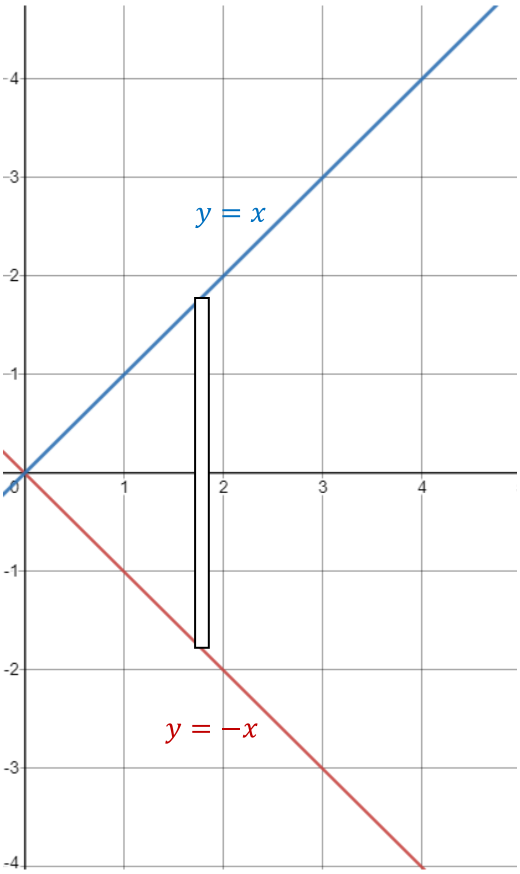
חשב את $\iint\limits_R e^{-x^2}dA$ כאשר R מוגדר ע"י התחום האינסופי: $x \ge 0$, $-x \le y \le x$



במקביל לציר ה- y האינטגרנד קבוע, לכן כדאית אינטגרציה ראשונה לפי dy
ואפשר גם "פעמיים מ- 0 עד x" במקום "פעם אחת מ- $(-x)$ עד x" :

$$\int_0^\infty \int_{-x}^{x} e^{-x^2}dydx = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b \int_0^x e^{-x^2}dydx$$

$$\int_0^x e^{-x^2}dy = e^{-x^2}y\Big|_0^x = x\,e^{-x^2}$$

$$-\int_0^b -2x\,e^{-x^2}dx \;\to\; \begin{matrix} u=-x^2 \\ du=-2xdx \end{matrix} \;=\; -\int_0^{-b^2} e^u du =$$

$$= \int_{-b^2}^{0} e^u du = [e^u\Big|_{-b^2}^{0} = 1-e^{-b^2}$$

לסיכום

$$\int_0^\infty \int_{-x}^{x} e^{-x^2}dydx = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b \int_0^x e^{-x^2}dydx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b 2x\,e^{-x^2}dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(1-e^{-b^2}\right) = 1$$

חשב את האינטגרל הבא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{e^x}}dx \;\to\; \begin{matrix} u=e^x \\ du=e^x dx \end{matrix} \;=\; \int_0^\infty \frac{1}{e^u}du = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-u}du =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}[e^{-u}\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty}(e^{-b}-e^0) = \mathbf{-(0-1)} = \mathbf{1}$$