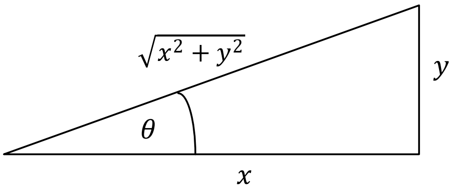
One leaf of a rose Find the area enclosed by one leaf of the rose $r = 12\cos 3\theta$.

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

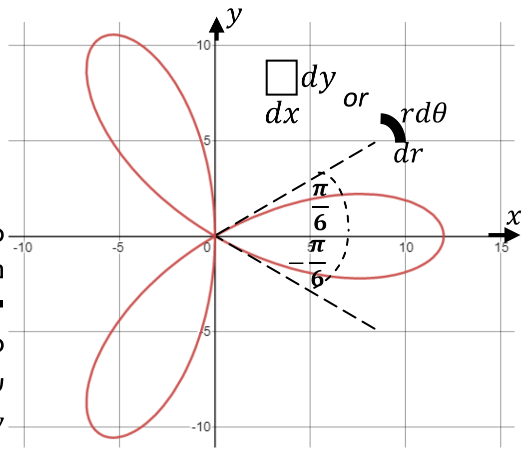
$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^3 - 3\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$



$r = 12\cos 3\theta \quad (Given)$

$\sqrt{x^2+y^2} = 12\left[4\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^3 - 3\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$

$(x^2+y^2)^2 = 48x^3 - 36x(x^2+y^2)$

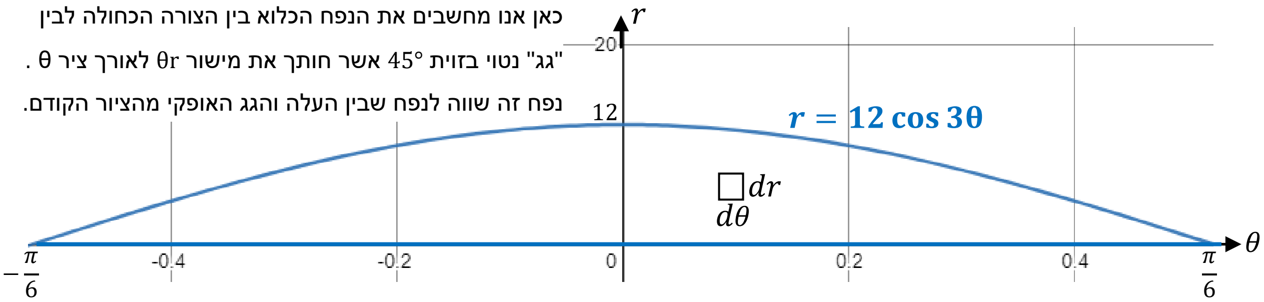


פונקציה סתומה במישור xy , מימין הסרטוט שצורתו 3 עלים.
נדמה "גג אופקי" בגובה $z = 1$ ונחשב את הנפח הכלוא בין העלה אשר פונה ימינה (מן הסתם) לבין הגג הנ"ל. נפח זה שווה מספרית לשטח העלה.
כדאי כמובן להשתמש ב"מקלות פולאריים" ($rd\theta dr$) אשר מתאימים לפורמט $r\theta$ שבו נתונה הפונקציה, ולא ב"מקלות קרטזיים" ($dxdy$) אשר מתאימים לפורמט xy הפחות ידידותי (והסתום) שלעיל.

הפונקציה $\boldsymbol{r = 12\cos 3\theta}$ מקבלת ערך מרבי (12) כאשר $3\theta = 0$ וערך מזערי (0) כאשר $3\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

אם כך, r הינו מרבי כאשר $\theta = 0$ ומזערי כאשר $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$. אלה הם גבולות האינטגרציה שלנו לפי θ.
גבולות האינטגרציה לפי r הם כמובן $0 \le r \le 12\cos 3\theta$.

כאן אנו מחשבים את הנפח הכלוא בין הצורה הכחולה לבין "גג" נטוי בזווית 45° אשר חותך את מישור θr לאורך ציר θ .
נפח זה שווה לנפח שבין העלה והגג האופקי מהציור הקודם.



$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{12\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{12\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2\Big|_0^{12\cos 3\theta} d\theta = 144\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(3\theta)\,d\theta =$$

$$= 72\int_0^{\frac{\pi}{6}}[\cos(6\theta)+1]\,d\theta = 72\left[\frac{\sin(6\theta)}{6}+\theta\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = 72\left[0+\frac{\pi}{6}-(0+0)\right] = 12\pi \; Area\ units$$