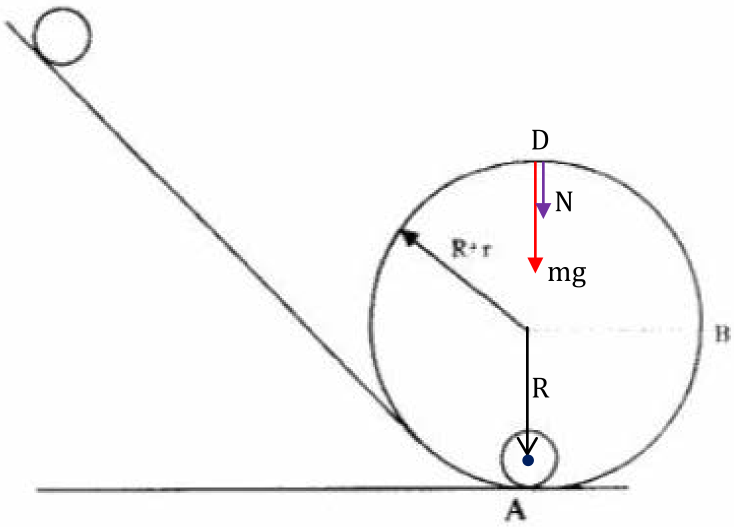
תרגיל 8:

כדור קטן בעל רדיוס r מתגלגל ללא החלקה לאורך מסילה שמסתיימת בלולאה שרדיוסה R+r (ראה ציור)

א. חשב את המהירות המינימלית של הגוף בנקודה A כדי שיוכל להשלים סיבוב אחד. (10 נקודות)
ב. מאיזה גובה מינימלי צריך לשחרר את הגוף כדי שיוכל להשלים סיבוב בלולאה. (10 נקודות)
ג. אם הגוף יתגלגל מגובה כפול מזה שמצאת בסעיף ב' באיזה כוח ילחץ הכדור על המסילה בנקודה B על המסילה (5 נקודות)



פיתרון א':

ראשית יש לחשב את v_{Dmin} - המהירות המינימלית אשר נדרשת בנקודה **D**, ומשם להתקדם.
בנקודה **D**, הכוח הנורמלי N שמפעילה המסילה על הכדור פועל כלפי מטה, ולכן מתלכד עם כוח הכובד ***mg***.
יש לזכור כי אנו דנים כאן במהירות של <u>מרכז המסה</u> של הכדור, אשר חג ברדיוס R.

$$\sum F_R = ma_R \quad => \quad mg + N = m\frac{v_D^2}{R}$$

ככל ש- v_D קטנה יותר, נדרש $\sum F_R$ קטן יותר, והדבר מושג באמצעות N קטן יותר.

כש- $v_D = v_{Dmin}$ נדרש $\sum F_R$ מינימלי, אשר מושג באמצעות איפוס של N.

$$\sum F_{Rmin} = ma_{Rmin} \quad => \quad mg + 0 = m\frac{v_{Dmin}^2}{R} \quad => \quad v_{Dmin} = \sqrt{gR}$$

זוהי המהירות המינימלית שבה צריך הכדור לנוע בנקודה **D** כדי שיישאר צמוד למסילה.

כעת יש למצוא את הקשר בין מהירות הכדור בנקודה **A** למהירותו בנקודה **D**.

האנרגיה המכאנית של הכדור נשמרת במהלך תנועתו. אנו נניח שהכדור מלא ואם כך מומנט ההתמד שלו הוא $I = \frac{2mr^2}{5}$

נזכור שהאנרגיה הקינטית שלו נובעת הן מתנועת מרכז המסה שלו והן מתנועתו הסיבובית - $E_K = E_{K_{CM}} + E_{K_{ROT}}$.

$$E_{Mi} = E_{Mf} \quad => \quad E_{P_A} + E_{K_A} = E_{P_D} + E_{K_D} \quad => \quad 0 + \frac{mv_A^2}{2} + \frac{I\omega_A^2}{2} = mg \cdot 2R + \frac{mv_D^2}{2} + \frac{I\omega_D^2}{2} \quad =>$$

$$=> \quad mv_A^2 + I\omega_A^2 = 4mgR + mv_D^2 + I\omega_D^2 \quad => \quad mr^2\omega_A^2 + \frac{2mr^2}{5}\omega_A^2 = 4mgR + mr^2\omega_D^2 + \frac{2mr^2}{5}\omega_D^2 \quad =>$$

$$=> \quad 5r^2\omega_A^2 + 2r^2\omega_A^2 = 20gR + 5r^2\omega_D^2 + 2r^2\omega_D^2 \quad => \quad 7r^2\omega_A^2 = 20gR + 7r^2\omega_D^2 \quad => \quad 7v_A^2 = 20gR + 7v_D^2$$

$$=> \quad v_A = \sqrt{\frac{20gR + 7v_D^2}{7}}$$

מצאנו את הקשר בין מהירות הכדור בנקודה **A** למהירותו בנקודה **D**.

כעת נציב את $v_{Dmin} = \sqrt{gR}$ כדי לקבל את v_{Amin} שהתבקשנו לחשב :

$$v_{Amin} = \sqrt{\frac{20gR + 7gR}{7}} = \sqrt{\frac{27gR}{7}}$$

פיתרון ב':

עלינו לברר מאיזה גובה h_{min} יש לשחרר את הכדור כדי שמהירותו בנקודה **A** תהא v_{Amin} .

ראשית נמצא את הקשר שבין הגובה h ממנו משוחרר הכדור לבין v_A - מהירות הכדור בנקודה **A** :

$$E_{Mi} = E_{Mf} \quad => \quad E_{P_h} + E_{K_h} = E_{P_A} + E_{K_A} \quad => \quad mgh + 0 = 0 + \frac{mv_A^2}{2} + \frac{I\omega_A^2}{2} \quad =>$$

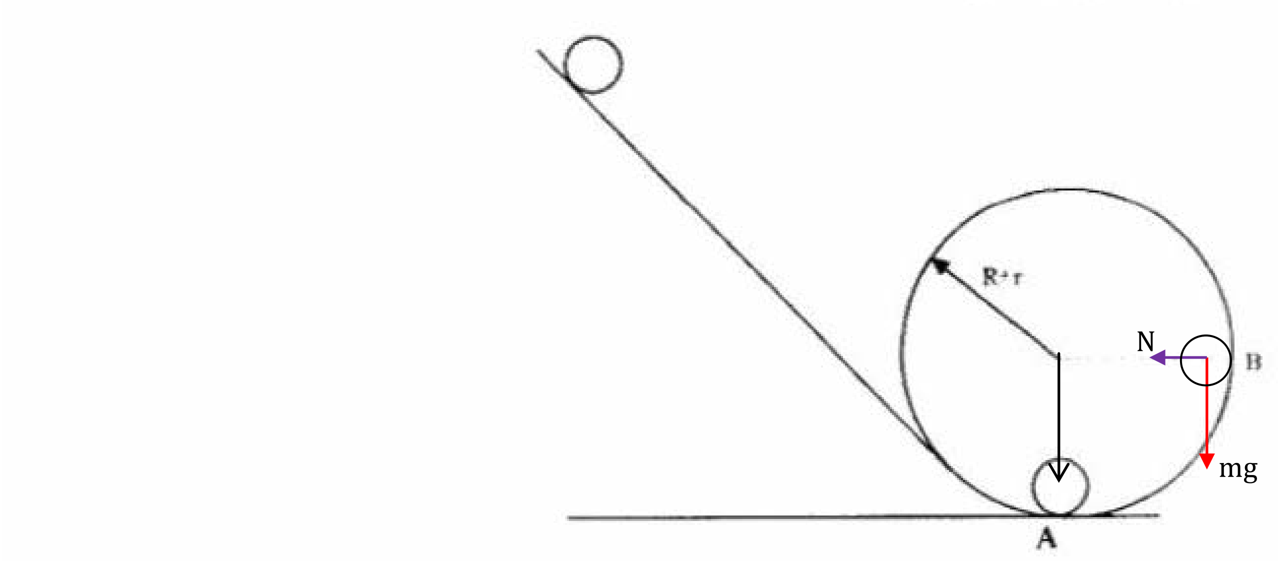
$$=> \quad 2mgh = mv_A^2 + I\omega_A^2 \quad => \quad 2mgh = mr^2\omega_A^2 + \frac{2mr^2}{5}\omega_A^2 \quad => \quad 10gh = 5r^2\omega_A^2 + 2r^2\omega_A^2 \quad =>$$

$$=> \quad 10gh = 7r^2\omega_A^2 \quad => \quad 10gh = 7v_A^2 \quad => \quad h = \frac{7v_A^2}{10g}$$

כעת נציב את $v_{Amin} = \sqrt{\frac{27gR}{7}}$ כדי לקבל את h_{min} שהתבקשנו לחשב :

$$h_{min} = \frac{7v_{Amin}^2}{10g} = \frac{27gR}{10g} = \frac{27R}{10}$$

ג. אם הגוף יתגלגל מגובה כפול מזה שמצאת בסעיף ב' באיזה כוח ילחץ הכדור על המסילה בנקודה B על המסילה. (5 נקודות)



אנו מתבקשים בעצם למצוא את N, הכוח בו לוחצת המסילה על הכדור, מפני שזהו גם הכוח שבו לוחץ הכדור על המסילה.

בנקודה B הכוח הצנטריפטלי השקול הוא N. mg מאונך לציר הרדיאלי ולכן אינו רלוונטי לענייננו.

$$\sum F_R = ma_R \quad => \quad N = m\frac{v_B^2}{R}$$

כעת נחשב מהי מהירות הכדור בנקודה B אם הוא משוחרר מגובה $2h_{min}$ ואח"כ נציב במשוואה הנ"ל כדי למצוא את N.

$$E_{Mi} = E_{Mf} \quad => \quad E_{P_H} + E_{K_H} = E_{P_B} + E_{K_B} \quad => \quad mg \cdot 2h_{min} + 0 = mgR + \frac{mv_B^2}{2} + \frac{I\omega_B^2}{2} \quad =>$$

$$=> \quad 4mgh_{min} = 2mgR + mv_B^2 + I\omega_B^2 \quad => \quad 4\,mg\frac{27R}{10} = 2mgR + mr^2\omega_B^2 + \frac{2mr^2}{5}\omega_B^2 \quad =>$$

$$=> \quad 54gR = 10gR + 5r^2\omega_B^2 + 2r^2\omega_B^2 \quad => \quad 44gR = 7r^2\omega_B^2 \quad => \quad 44gR = 7v_B^2 \quad => \quad v_B^2 = \frac{44gR}{7}$$

$$N = m\frac{v_B^2}{R} \quad => \quad N = \frac{m}{R}\cdot\frac{44gR}{7} \quad = \quad \frac{44mg}{7}$$

מסת הכדור m אינה מופיעה ברשימת הפרמטרים של הבעיה, אך נראה שאין מנוס מלהשתמש בה בסעיף זה.