האם הפונקציה הבאה רציפה?

$$f_{(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-y)}{|x|+|y|} & , \quad |x|+|y| \neq 0 \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

פיתרון:

כדי שתהא רציפה, גבול הפונקציה כאשר $(x,y) \to (0,0)$ צריך להיות שווה לערך הפונקציה בנקודה $(0,0)$, אשר נתון שהינו 0. בקיצור, צריך להתקיים $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{(x,y)} = 0$

ראשית נבדוק אם קיים בכלל הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{(x,y)}$

ננסה לשלול את קיומו בשיטת המסלולים.

נבחר שני מסלולים במישור xy אשר עוברים ב- $(0,0)$ ונקווה שיתקבלו גבולות שונים בהתקרבנו לראשית.

במסלול הראשון ננוע לאורך ציר x $(y=0)$ החיובי בכיוון הראשית ובמסלול השני ננוע לאורך ציר x $(y=0)$ השלילי בכיוון הראשית:

$$f_{(x,0)} = \frac{\sin(x-0)}{|x|+|0|} = \frac{\sin(x)}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & , \quad x > 0 \\ -\dfrac{\sin(x)}{x} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x)\to 0^+} f_{(x,0)} = \lim_{(x)\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{(x)\to 0^-} f_{(x,0)} = \lim_{(x)\to 0^-} \left[-\frac{\sin(x)}{x}\right] = -1$$

$$\lim_{(x)\to 0^+} f_{(x,0)} = 1 \quad \neq \quad \lim_{(x)\to 0^-} f_{(x,0)} = -1 \qquad => \qquad Limit\ doesn't\ exist$$

יצאנו בזול, הגבול כאשר $(x,y) \to (0,0)$ אינו קיים, אז כלל אין מה לדון ברציפות.

תחום ההגדרה של $f_{(x,y)}$ הוא המישור xy.

בדקנו אם ל- f יש גבול בראשית הצירים וגילינו שאין.

כאשר מתקרבים לראשית מימין, הפונקציה שואפת לערך 1 ,
וכאשר מתקרבים לראשית משמאל, הפונקציה שואפת לערך -1
.

אם פונקציה שואפת לערכים שונים כאשר מתקרבים לאותה הנקודה מכיוונים שונים, אז לפונקציה אין גבול בנקודה.