

$$z(x,y) = \frac{y^2}{3x} + g(x,y)$$

יש לחשב את ערך הביטוי

$$x^2 z_x - xyz_y + y^2$$

פיתרון:

$$z_x = -\frac{y^2}{3x^2} + g_x, \quad z_y = \frac{2y}{3x} + g_y$$

$$x^2 z_x - xyz_y + y^2 = x^2 \left(g_x - \frac{y^2}{3x^2} \right) - xy \left(\frac{2y}{3x} + g_y \right) + y^2 =$$

$$= x^2 g_x - \frac{y^2}{3} - \frac{2y^2}{3} - xy g_y + y^2 = x^2 g_x - xy g_y$$

הביטוי שקיבלנו נכון אולי, אבל לא קיבלנו ערך מספרי כפי שהתבקשנו. נלך בדרך אחרת, זו הנקראת "נוסחה לגזירה סתומה" (ראה סיכום אודות כלל השרשרת):

נוסחה לגזירה סתומה

נניח כי גזירה ושהמשוואה $F(x,y) = 0$ מגדירה את y כפונקציה גזירה של x . או אז, בכל נקודה שבה $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

לאחר סידור אגפים במשוואה הנתונה, נקבל

$$g = z - \frac{y^2}{3x}$$

המשוואה $g(x,z) = 0$ מגדירה את z כפונקציה גזירה של x ואילו המשוואה $g(y,z) = 0$ מגדירה את z כפונקציה גזירה של y .

$$g(x,z) = z - \frac{y^2}{3x}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{g_x}{g_z} = -\frac{\frac{y^2}{3x^2}}{1} = -\frac{y^2}{3x^2}$$

$$g(y,z) = z - \frac{y^2}{3x}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{g_y}{g_z} = -\frac{-\frac{2y}{3x}}{1} = \frac{2y}{3x}$$

$$x^2 z_x - xyz_y + y^2 = x^2 \left(-\frac{y^2}{3x^2} \right) - xy \left(\frac{2y}{3x} \right) + y^2 = -\frac{y^2}{3} - \frac{2y^2}{3} + y^2 = 0$$