

שאלה 3 יישומי אינטגרלים (25 נקודות)

בסרטוט שלפניכם באותה מערכת הצירים נתונים גרפים של

שתי פונקציות $y = x^2$ ו- $y = x$.

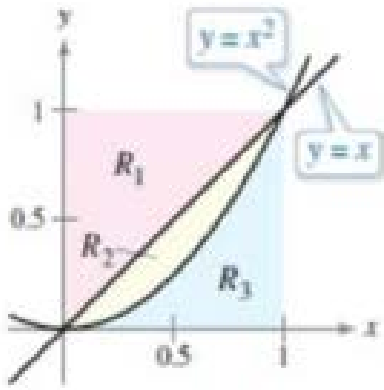
בנוסף מסומנים שלושה תחומים R_1, R_2, R_3 שנוצרו בין הגרפים,

בין הצירים ובין הישרים $y = x - 1$ ו- $y = 1 - x$. (ראו סרטוט).

בכל סעיף מוצא נפח הגוף שנוצר על ידי סיבוב התחום R_2

סביב הישר הנתון.

א. $y = 1$ **ב.** $x = 0$



פתרון א' :

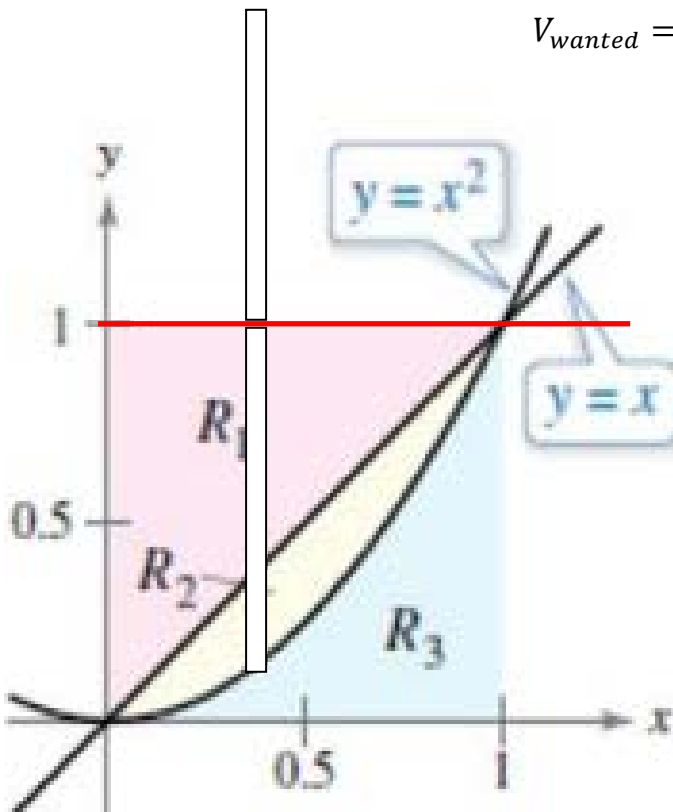
נחשב את הנפח הכולל V_T אשר כולא בין הפרבולה החגה לבין ציר הסיבוב, ואז נחסר ממנו את הנפח הוורוד (חרוט) אשר כולא בין הישר החג לבין ציר הסיבוב.

$$dV = \pi r^2 h = \pi(1 - x^2)^2 dx = \pi(x^4 - 2x^2 + 1)dx$$

$$V_T = \int_a^b dV = \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{8}{15}\pi$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 1^2 1 = \frac{1}{3}\pi$$

$$V_{wanted} = V_T - V_{cone} = \frac{8}{15}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{5}\pi \text{ Cubic Units}$$



פתרון ב' :

נחשב את הנפח הכולל V_T אשר כולל בין הפרבולה החגה לבין ציר הסיבוב, ואז נחסר ממנו את הנפח הוורוד (חרוט) אשר כולל בין הישר החג לבין ציר הסיבוב.

$$dV = \pi r^2 h = \pi(\sqrt{y} - 0)^2 dy = \pi y dy$$

$$V_T = \int_a^b dV = \pi \int_0^1 y dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (1 - 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi 1^2 1 = \frac{1}{3} \pi$$

$$V_{wanted} = V_T - V_{cone} = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{6} \pi \text{ Cubic Units}$$

