שאלה 2 אינטגרל מסוים וסכום רימן - 25 נקודות

א. (12 נקודות)

נתון כי: (1) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4$ (2) $\int_{2}^{5} f(x)dx = 3$ (3) $\int_{-2}^{5} g(x)dx = 2$

לגבי כל טענה קבעו אם היא נכונה או לא נכונה , או לא ניתן לדעת .

נמקו את קביעתכם.

טענה 1: הפונקציה $f(x)$ חיובית לכל x בתחום $2 \le x \le 5$

נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

טענה 2: $\int_{-2}^{5}(f(x) + g(x))dx = 9$

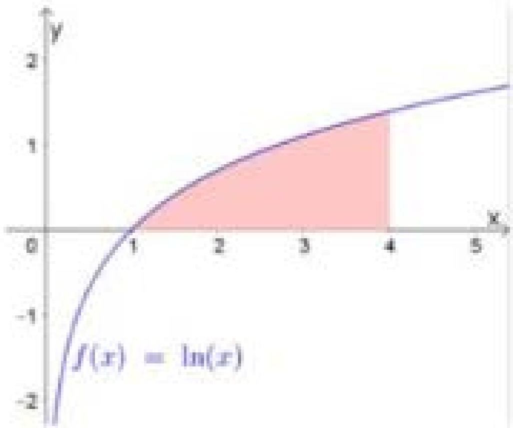
נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

ב. (13 נקודות)

נתון גרף הפונקציה $f(x) = lnx$

1. (4 נקודות) קבעו איזה מהגבולות הבאים מתאים ל-$\int_{1}^{4} f(x)dx$

סמנו את כל האפשרויות הנכונות ונמקו :



i. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + ln\left(\frac{3k}{n}\right)\right)\frac{3}{n}$

ii. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$

iii. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n} \cdot ln\left(\frac{3k}{n}\right)$

iv. $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{3k}{n}\right)$

2. (5 נקודות) מצאו קירוב לערך של $\int_{1}^{4} f(x)dx$ באמצעות חישוב של $\sum_{k=1}^{3} f(x_k)\Delta x$.

היעזרו בסרטוט משמאל כדי להדגים את החישוב : סרטטו את המלבנים ובכל מלבן כתבו את הביטויים המתאימים ל- Δx וגם ל-$f(x_k)$.

3. (4 נקודות) חשבו את האינטגרל $\int_{1}^{4} f(x)dx$.

א. (12 נקודות)

נתון כי: (1) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4$ (2) $\int_{2}^{5} f(x)dx = 3$ (3) $\int_{-2}^{5} g(x)dx = 2$

לגבי כל טענה קבעו אם היא נכונה או לא נכונה , או לא ניתן לדעת .

נמקו את קביעתכם.

טענה 1: הפונקציה $f(x)$ חיובית לכל x בתחום $2 \le x \le 5$

נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

טענה 2: $\int_{-2}^{5}(f(x) + g(x))dx = 9$

נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

פיתרון א':

טענה 1 - לא ניתן לדעת. אפשר רק לומר שבתחום המדובר $f_{(x)}$ "יותר חיובית מאשר שלילית", אך לא יותר מכך.

טענה 2 - נכון כי

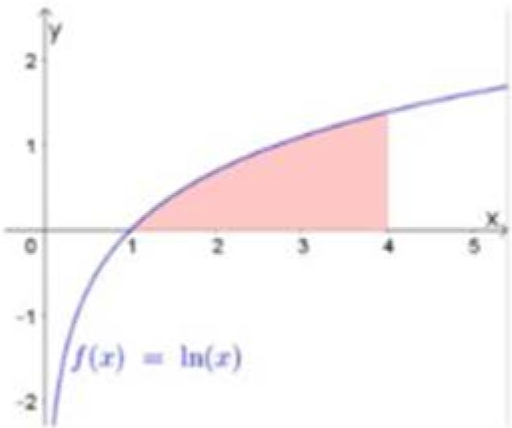
$$\int_{-2}^{5}\left(f_{(x)} + g_{(x)}\right)dx = \int_{-2}^{5} f_{(x)}dx + \int_{-2}^{5} g_{(x)}dx = \int_{-2}^{2} f_{(x)}dx + \int_{2}^{5} f_{(x)}dx + \int_{-2}^{5} g_{(x)}dx = 4 + 3 + 2 = 9$$

ב. (13 נקודות)

נתון גרף הפונקציה $f(x) = lnx$

1. (4 נקודות) קבעו איזה מהגבולות הבאים מתאים ל- $\int_1^4 f(x)dx$

סמנו את כל האפשרויות הנכונות ונמקו :



i. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(1 + ln\left(\frac{3k}{n}\right)\right)\frac{3}{n}$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$

iii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot ln\left(\frac{3k}{n}\right)$

iv. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{3k}{n}\right)$

פיתרון ב' 1:

בשני המקרים שסומנו מדובר בסכום שטחיהם של "אינסוף" מלבנים בעלי רוחב "אפסי" אשר מכסים במדויק את השטח הוורוד שבסרטוט. $ln\left(1+\frac{3k}{n}\right)$ הוא גובהו של המלבן ה-"k" ואילו $\frac{3}{n}$ הוא רוחבו. צידו השמאלי של המלבן הראשון $(k=1)$ ממוקם ב- $x=1$, ואילו צידו הימני של המלבן האחרון $(k=n)$ ממוקם ב- $x=4$.

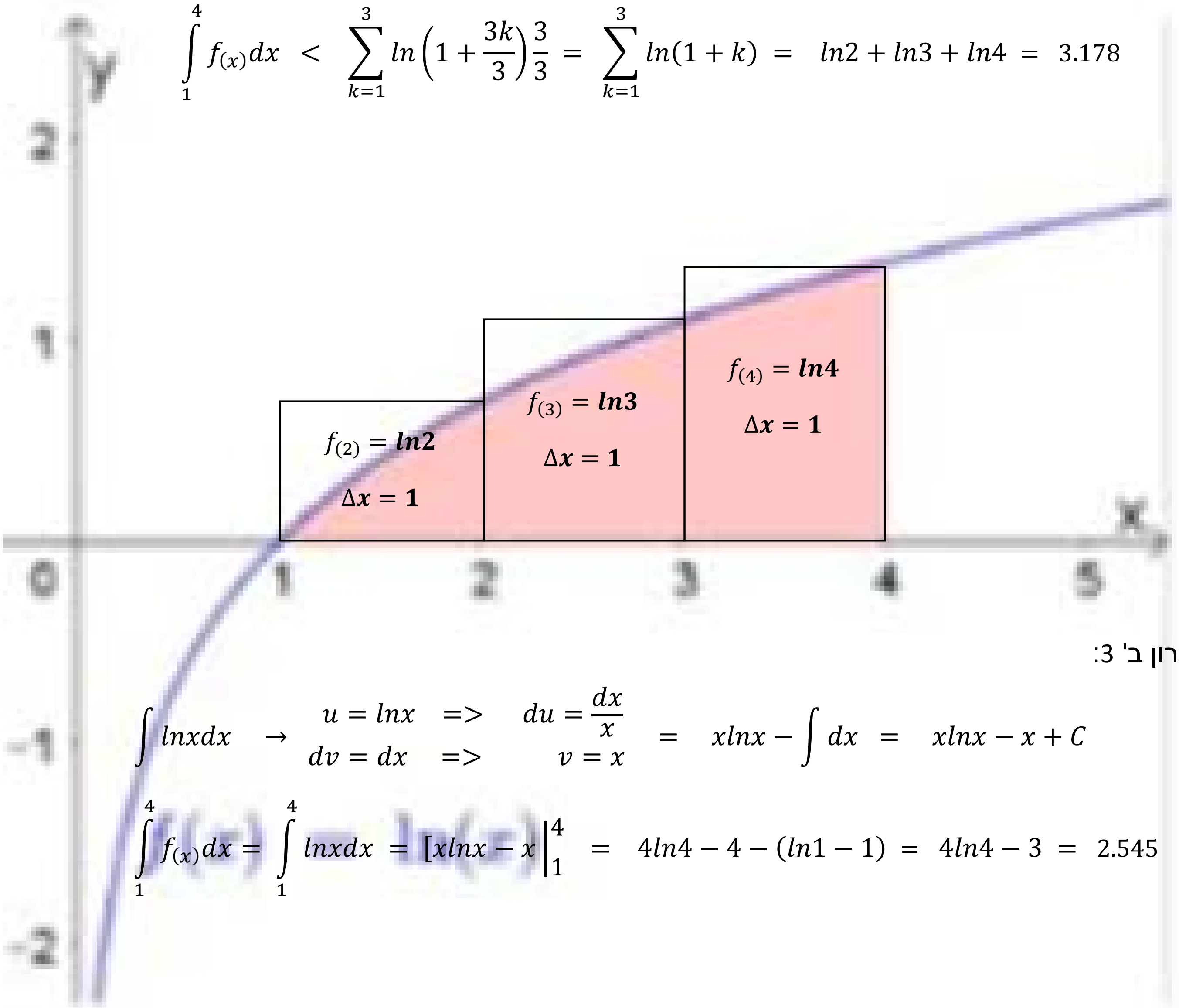
המכפלה $\left(1+\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$ מניבה את שטחו של המלבן ה- "k" והסיגמה סוכמת את שטחיהם של n מלבנים.

הגבול משאיף את מספר המלבנים לאינסוף ולכן את רוחבם לאפס, כך שאינם "בולטים" עוד אל מעבר לגרף ולכן מכסים במדויק את השטח הוורוד שבסרטוט.

2. (5 נקודות) מצאו קירוב לערך של $\int_1^4 f(x)dx$ באמצעות חישוב של $\sum_{k=1}^{3} f(x_k)\Delta x$.
היעזרו בסרטוט משמאל כדי להדגים את החישוב: סרטטו את המלבנים ובכל מלבן
כתבו את הביטויים המתאימים ל- Δx וגם ל- $f(x_k)$.

פיתרון ב' 2:

$$\int_1^4 f_{(x)}dx \;<\; \sum_{k=1}^{3} ln\left(1+\frac{3k}{3}\right)\frac{3}{3} \;=\; \sum_{k=1}^{3} ln(1+k) \;=\; ln2+ln3+ln4 \;=\; 3.178$$



פיתרון ב' 3:

$$\int lnxdx \;\rightarrow\; \begin{matrix} u = lnx & => & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & => & v = x \end{matrix} \;=\; xlnx - \int dx \;=\; xlnx - x + C$$

$$\int_1^4 f_{(x)}dx = \int_1^4 lnxdx \;=\; [xlnx - x\Big|_1^4 \;=\; 4ln4 - 4 - (ln1 - 1) \;=\; 4ln4 - 3 \;=\; 2.545$$

השטח המדויק שחושב כאן קטן משמעותית מהשטח המקורב שחושב בסעיף ב' 2.
ככל שיחולק התחום ליותר מלבנים, יקטן הפער בין השניים.
האינטגרל שקול לחלוקת התחום [1,4] לאינסוף מלבנים ומביא לאיפוס של השטח העודף.