

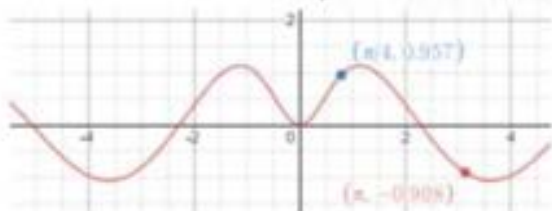
שאלה 1 – משפט יסודי של חדווא וחקירת פונקציה - 25 נקודות

א. (13 נקודות)

נתונה פונקציה רציפה $f(x)$ כך שלכל x מתקיים: $\int_0^x f(t)dt = x^2 \sin x - \int_0^x t^2 f(t)dt$

1. (5 נקודות) מצאו את הייצוג האלגברי של הפונקציה $f(x)$.
2. (4 נקודות) קבעו אם הפונקציה זוגית / אי-זוגית / כללית. הוכיחו בהסתמך על ההגדרה.
3. (4 נקודות) לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ עליו מסומנות שתי נקודות.

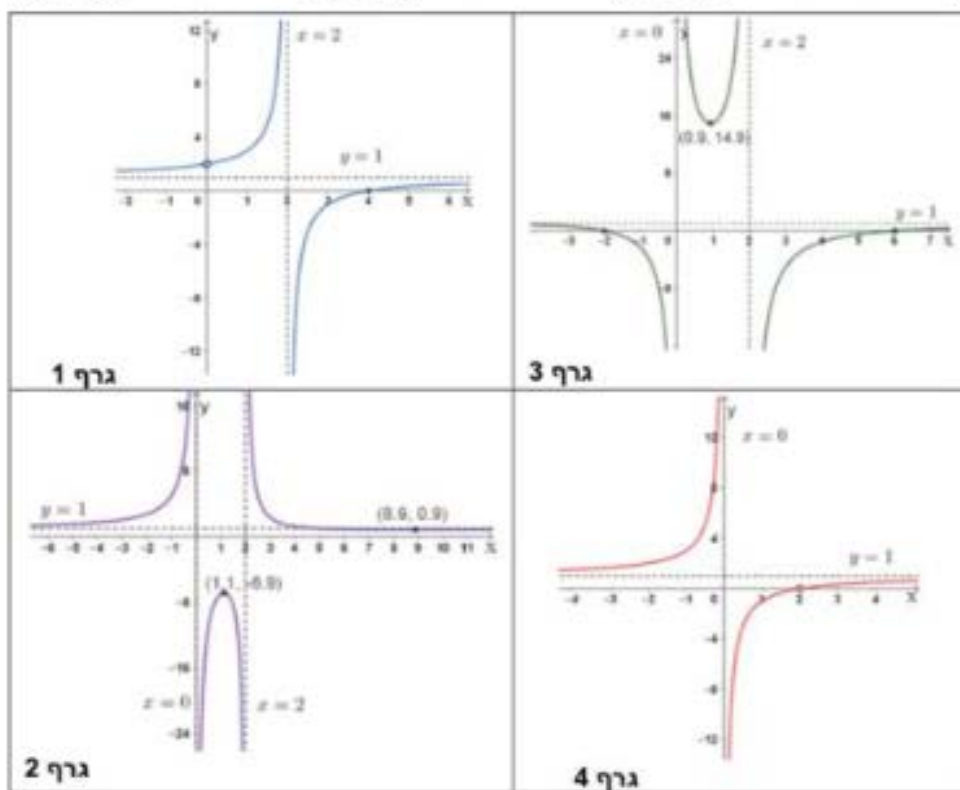
קבעו על פי הגרף לגבי כל ביטוי האם הוא חיובי, שלילי או אפס (נמקו):



- i. $f'(\pi)$
- ii. $f''(\pi)$
- iii. $f''(-\frac{\pi}{4})$
- iv. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

ב. (12 נקודות) נתונות ארבע פונקציות וארבעה גרפים. התאימו בין הפונקציות לגרפים ונמקו:

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} \quad f_2(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 2x} \quad f_3(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 2x} \quad f_4(x) = \frac{x^2 - 4x + 10}{x^2 - 2x}$$



.1

$$\int_0^x f(t) dt = x^2 \sin x - \int_0^x t^2 f(t) dt \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = \frac{d}{dx} \left(x^2 \sin x - \int_0^x t^2 f(t) dt \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (x^2 \sin x) - \frac{d}{dx} \int_0^x t^2 f(t) dt \Rightarrow f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x - x^2 f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)(x^2 + 1) = 2x \sin x + x^2 \cos x \Rightarrow f(x) = \frac{2x \sin x + x^2 \cos x}{x^2 + 1}$$

.2

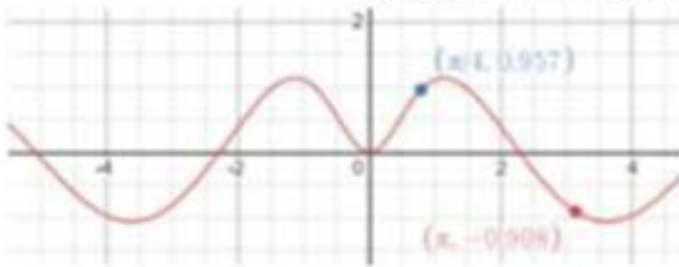
$$f(-x) = \frac{2(-x) \sin(-x) + (-x)^2 \cos(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{2(-x)[- \sin x] + (-x)^2 \cos x}{(-x)^2 + 1} =$$

$$= \frac{-2x[- \sin x] + x^2 \cos x}{x^2 + 1} = \frac{2x \sin x + x^2 \cos x}{x^2 + 1} = f(x) \Rightarrow \text{זוגית}$$

.3

4) נקודות) לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ עליו מסומנות שתי נקודות.

קבעו על פי הגרף לגבי כל ביטוי האם הוא חיובי, שלילי או אפס (נמקו):



i. $f'(\pi)$ iii. $f''\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ii. $f''(\pi)$ iv. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

$f'(\pi) < 0$ כי ב- $x = \pi$ הגרף יורד.

$f''(\pi) > 0$ כי ב- $x = \pi$ הגרף קעור ("מחייך").

$f''\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0$ כי ב- $x = -\frac{\pi}{4}$ הגרף קמור (כמו ב- $x = \frac{\pi}{4}$, אנו יודעים זאת בשל היות הפונקציה זוגית).

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx > 0$ כי בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הגרף נמצא מעל ציר ה- x (ז"א הפונקציה חיובית).

ב. (12 נקודות) נתונות ארבע פונקציות וארבעה גרפים. התאימו בין הפונקציות לגרפים ונמסו:

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} \quad f_2(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 2x} \quad f_3(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 2x} \quad f_4(x) = \frac{x^2 - 4x + 10}{x^2 - 2x}$$

אס' אנכית ב- $x = 2$

אפס ב- $x = 4$

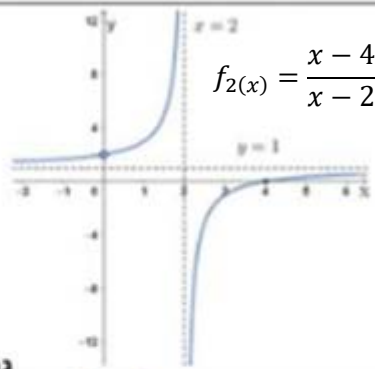
אס' אופקית ב-

$$y = 1$$

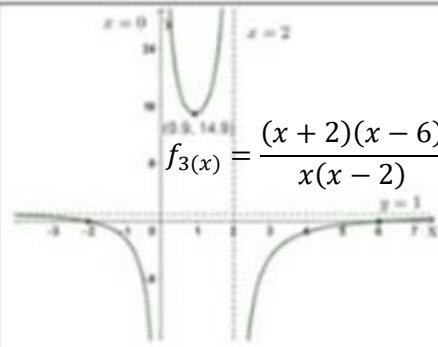
(0,2) מהווה חיתוך

עם ציר ה- y

גרף 1



גרף 3



אס' אנכית ב-

$$x = 0, 2$$

אפסים ב-

$$x = -2, 6$$

אס' אופקית ב-

$$y = 1$$

אס' אנכית ב-

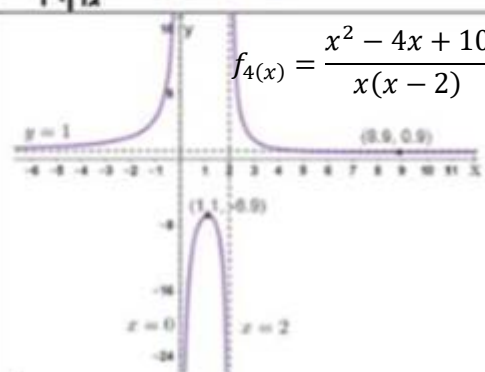
$$x = 0, 2$$

אין אפסים

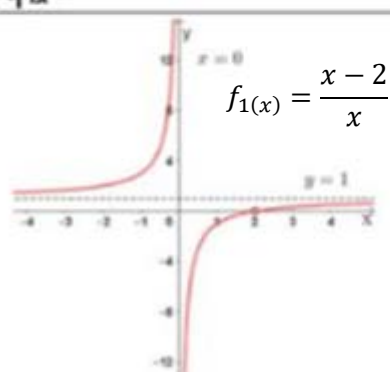
אס' אופקית ב-

$$y = 1$$

גרף 2



גרף 4



אס' אנכית ב-

$$x = 0$$

אפס ב- $x = 2$

אס' אופקית ב-

$$y = 1$$

$$f_1(x) = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x} \quad , \quad f_2(x) = \frac{x(x-4)}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$$

$$f_3(x) = \frac{(x+2)(x-6)}{x(x-2)} \quad , \quad f_4(x) = \frac{x^2 - 4x + 10}{x(x-2)}$$