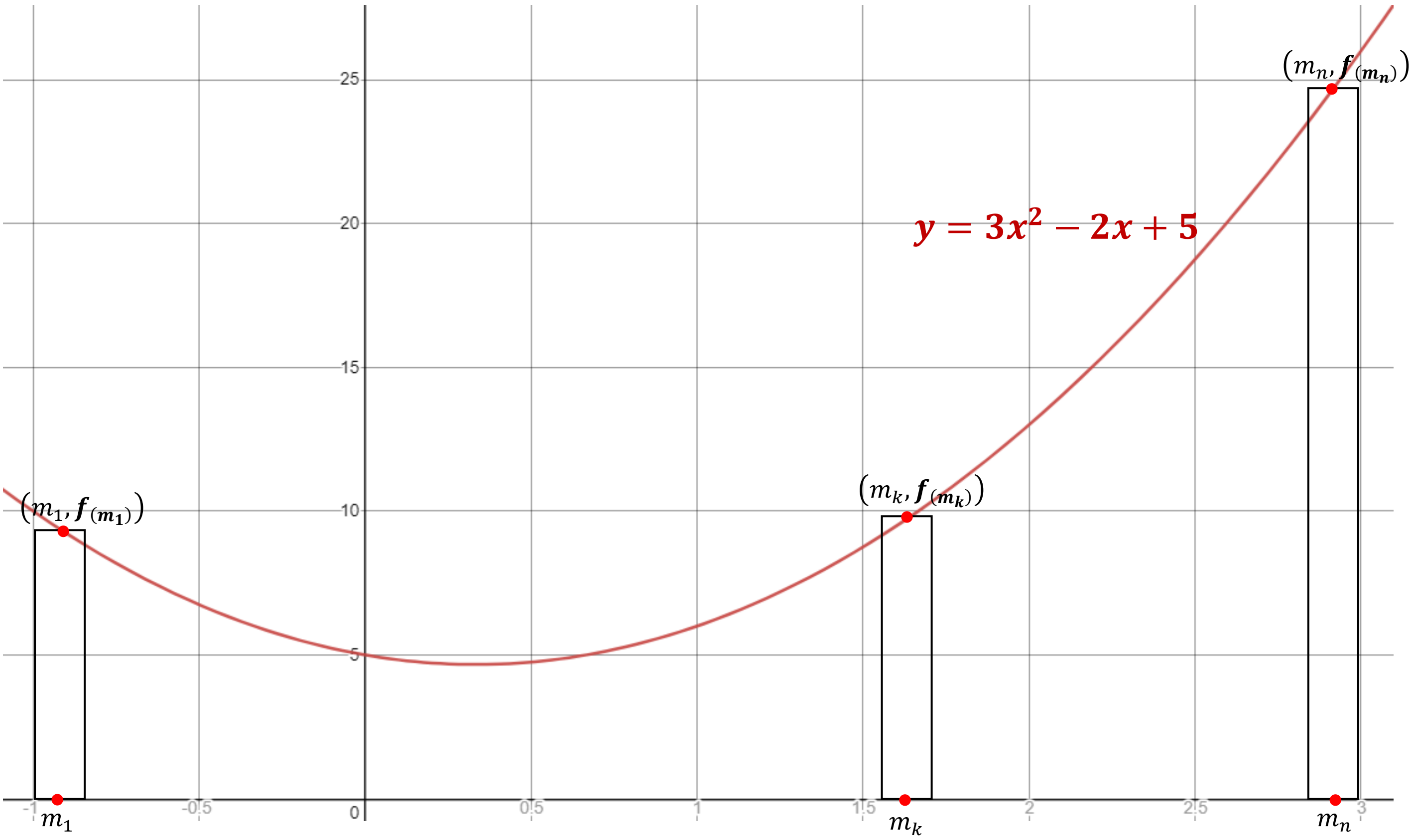
10. קטע $[-1, 3]$ מחולק ל-n חלקים שווים כך שאורך כל חלק $\Delta x = \frac{4}{n}$.

נניח כי m_k – אמצע של החלק ה-k.

בטאו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(3(m_k)^2 - 2m_k + 5)\cdot\Delta x$ כאינטגרל של פונקציה מתאימה.



רוחבו של הקטע $[-1, 3]$ הוא 4, לכן מחלוקתו ל- n חלקים שווים מתקבלים תת-אינטרוולים שרוחבם $\Delta x = \frac{4}{n}$.

m_k הוא אמצעו של תת-האינטרוול ה-"k"י ו- $f_{(m_k)}$ הוא גובהו של המלבן ה-"k"י (ראה ציור).

רוחבו של כל מלבן הוא Δx , ולכן שטחו של המלבן ה-"k"י הוא $A_k = f_{(m_k)}\cdot\Delta x$.

אם נבחר $f_{(x)} = 3x^2 - 2x + 5$ אז שטחו של המלבן ה-"k"י יהיה $A_k = (3m_k^2 - 2m_k + 5)\cdot\Delta x$.

סכום שטחי n המלבנים יהיה אז $S_n = \sum_{k=1}^{n}(3m_k^2 - 2m_k + 5)\cdot\Delta x$

אם מספר המלבנים ישאף לאינסוף $(n \to \infty)$ אז רוחבו של כל מלבן ישאף לאפס $(\Delta x \to 0 \;\; => \;\; \Delta x = dx)$ והסכום (הסיגמה) יהפוך לאינטגרל בתחום הרלוונטי:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(3m_k^2 - 2m_k + 5)\cdot\Delta x = \int_{-1}^{3}(3x^2 - 2x + 5)\cdot dx =$$

$$= \left[x^3 - x^2 + 5x\right|_{-1}^{3} = 27 - 9 + 15 - (-1 - 1 - 5) = 33 + 7 = 40$$