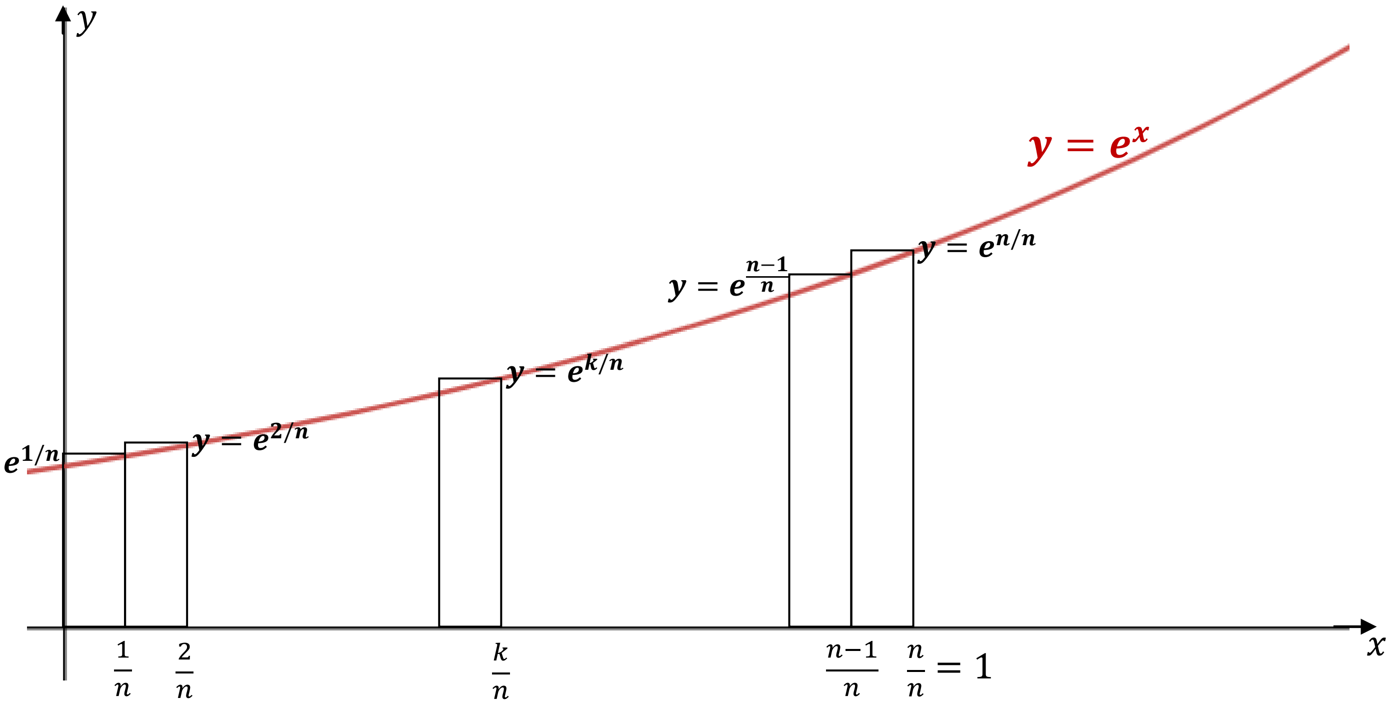
מצא את $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n}+e^{2/n}+\cdots+e^{(n-1)/n}+e^{n/n}\right)$

פיתרון:



אם נחלק את האינטרוול $[0,1]$ ל- n תת-אינטרוולים שווים, יהיה רוחבו של כל תת-אינטרוול $\Delta x=\frac{1}{n}$.

מאחר שהקצה השמאלי של האינטרוול הוא 0 , מתקבל

$$x_1=\Delta x \quad , \quad x_2=2\Delta x \quad , \quad x_3=3\Delta x \ , \dots\dots , x_k=k\Delta x \ , \dots\dots\dots , \quad x_{n-1}=(n-1)\Delta x \quad , \quad x_n=n\Delta x=b$$

x_k הוא קצהו הימני של תת-האינטרוול ה-"k"י, ולכן $f_{(x_k)}$ הוא גובהו של המלבן ה-"k"י (ראה ציור).
רוחבו של כל מלבן הוא Δx , ולכן שטחו של המלבן ה-"k"י הוא $A_k=f_{(x_k)}\cdot\Delta x$. נרשום זאת באופן מפורט:

$$A_1 = f_{(x_1)}\cdot\Delta x = e^{1/n}\cdot\Delta x$$
$$A_2 = f_{(x_2)}\cdot\Delta x = e^{2/n}\cdot\Delta x$$
.
.
.
$$A_k = f_{(x_k)}\cdot\Delta x = e^{k/n}\cdot\Delta x$$
.
.
.
$$A_n = f_{(x_n)}\cdot\Delta x = e^{n/n}\cdot\Delta x$$

נסכום כעת את שטחי n המלבנים :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{k/n}\cdot\Delta x = \left(e^{1/n}+e^{2/n}+\cdots+e^{(n-1)/n}+e^{n/n}\right)\frac{1}{n}$$

כעת נשאיף את מספר המלבנים לאינסוף $(n\to\infty)$ כך שרוחבו של כל מלבן ישאף לאפס $(\Delta x\to 0 \ \ => \ \ \Delta x=dx)$ והסכום (הסיגמה) יהפוך לאינטגרל :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{k/n}\cdot\Delta x = \int_0^1 e^x\cdot dx = e^x\Big|_0^1 =$$

$$= e^1-e^0 = e-1$$

לסיכום,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n}+e^{2/n}+\cdots+e^{(n-1)/n}+e^{n/n}\right) = \int_0^1 e^x\cdot dx = e-1$$