נתונה המשוואה הבאה בה V - נפח, P - לחץ, T – טמפרטורה, a,b - קבועים.

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)\cdot(V-b)=82.06\cdot T$$

בכמה משתנה הנפח בקירוב אם מגדילים את הלחץ ב- 0.1 אטמוספרות, כאשר

$$V=25{,}600\ cm^3\ \ ,\ \ P=1\ atm\ \ ,\ \ T=313\ k\ \ \ ,\ \ \ a=3.59\cdot 10^6\ \ \ ,\ \ \ b=42.7$$

פיתרון:

ראשית עלינו לגזור את הנפח V לפי הלחץ P. אי אפשר לבודד כאן את V ולכן נאלץ לבצע גזירה סתומה שלו לפי P.
אנו זוכרים ש-V הוא פונקציה של P (ושל T) ולכן מתייחסים אליו כאל "קופסה שחורה" אשר מכילה את המשתנה P:

$V_{(P,T)}=?\ \ From\ the\ given\ equation\ we\ can't\ isolate\ V_{(P,T)}$

$\frac{dV}{dP}=?\ \ That\ we\ can\ still\ discover!$

נגזור את שני אגפי המשוואה לפי P ואז נבודד את הנגזרת של V לפי P :

$$\frac{\partial}{\partial P}\left[\left(P+\frac{a}{V_{(P,T)}^2}\right)\cdot\left(V_{(P,T)}-b\right)\right]=\frac{\partial}{\partial P}[82.06\cdot T]$$

$$\left(1-\frac{a}{V_{(P,T)}^4}\cdot 2V_{(P,T)}\frac{\partial V}{\partial P}\right)\cdot\left(V_{(P,T)}-b\right)+\left(P+\frac{a}{V_{(P,T)}^2}\right)\frac{\partial V}{\partial P}=0$$

$$V_{(P,T)}-b-\frac{2a}{V_{(P,T)}^3}\left(V_{(P,T)}-b\right)\frac{\partial V}{\partial P}+\left(P+\frac{a}{V_{(P,T)}^2}\right)\frac{\partial V}{\partial P}=0$$

$$V_{(P,T)}-b=\frac{2a}{V_{(P,T)}^3}\left(V_{(P,T)}-b\right)\frac{\partial V}{\partial P}-\left(P+\frac{a}{V_{(P,T)}^2}\right)\frac{\partial V}{\partial P}$$

$$V_{(P,T)}-b=\left(\frac{2a}{V_{(P,T)}^3}\left(V_{(P,T)}-b\right)-P-\frac{a}{V_{(P,T)}^2}\right)\frac{\partial V}{\partial P}=\left(\frac{a}{V_{(P,T)}^2}-\frac{2ab}{V_{(P,T)}^3}-P\right)\frac{\partial V}{\partial P}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P}=\frac{V_{(P,T)}-b}{\frac{a}{V_{(P,T)}^2}-\frac{2ab}{V_{(P,T)}^3}-P}$$

נציב את הערכים הנתונים:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{P_0}=\frac{25{,}600-42.7}{\frac{3.59\cdot 10^6}{25{,}600^2}-\frac{2\cdot 3.59\cdot 10^6\cdot 42.7}{25{,}600^3}-1}=-25{,}698\ \frac{cm^3}{atm}\ \approx\ -25{,}700\frac{cm^3}{atm}$$

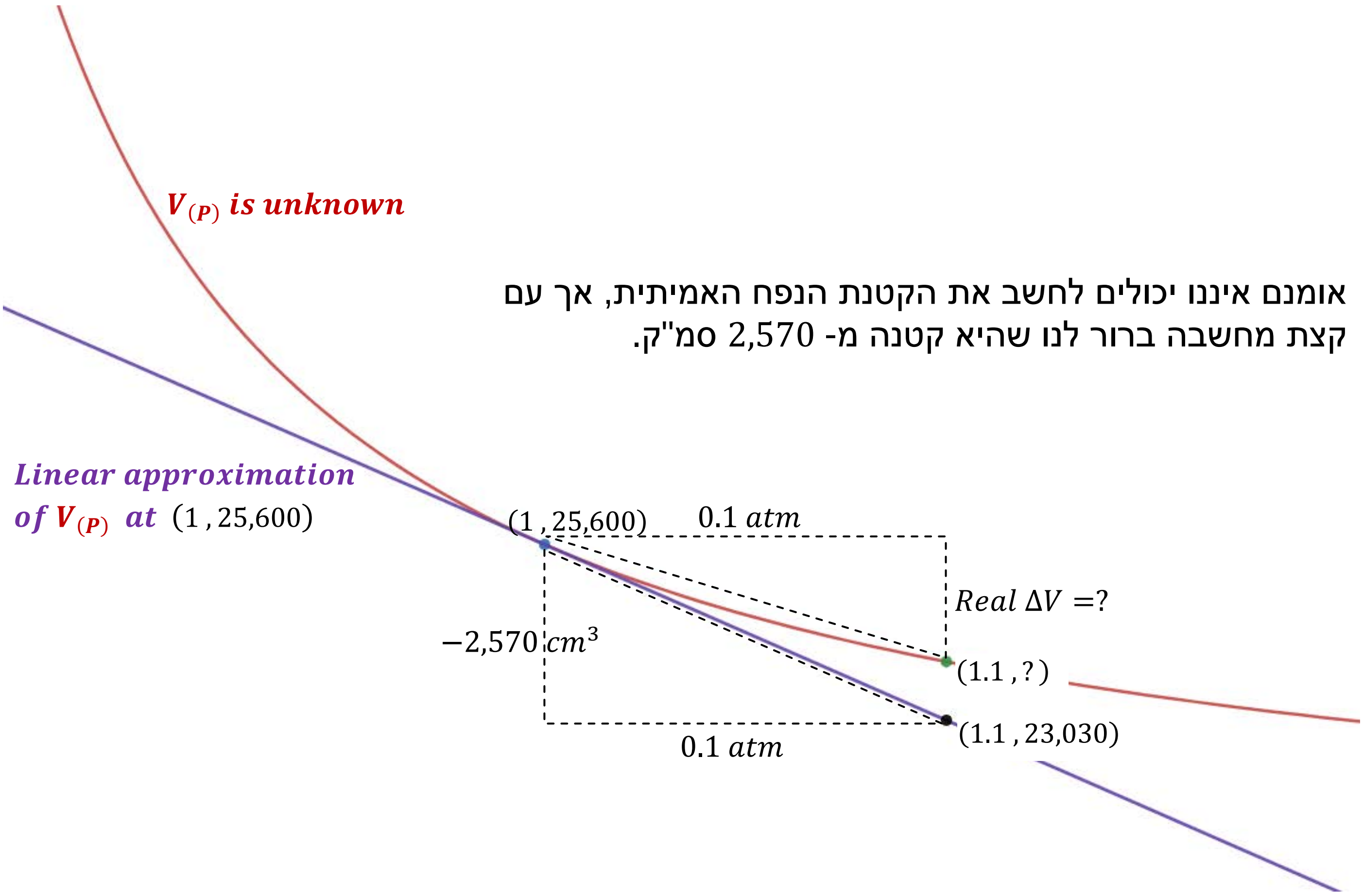
קיבלנו את קצב השינוי של הנפח כתלות בלחץ כאשר $T = 313\ k$, $P = 1\ atm$, $V = 25{,}600\ cm^3$.
לו הייה קיים קשר ליניארי בין הלחץ והנפח, היינו יכולים לומר שהגדלה של הלחץ באטמוספרה אחת מביאה להקטנת הנפח בכ- 25,700 סמ"ק ומכאן, שהגדלת הלחץ ב**עשירית** האטמוספרה מביאה להקטנה של הנפח בעשירית מכך: 2,570 סמ"ק.

במציאות, הקשר בין הלחץ והנפח אינו ליניארי, ולכן תשובה זו מהווה קירוב בלבד להקטנת הנפח האמיתית.

לו היינו יכולים לבודד את $V_{(P,T)}$ בפונקציה הנתונה, היינו יכולים לחשב את הקטנת הנפח האמיתית באופן הבא:

$$\Delta V = V_{(1.1\ ,\ 313)} - V_{(1\ ,\ 313)}$$

באמצעות הצבה פשוטה וישירה בפונקציה.



אומנם איננו יכולים לחשב את הקטנת הנפח האמיתית, אך עם קצת מחשבה ברור לנו שהיא קטנה מ- 2,570 סמ"ק.

אגב, אפשר היה לגזור גם כך, כפי שמוסבר בסיכום על כלל השרשרת. הרבה יותר קצר, אז אם מותר למה לא?

<u>נוסחה לגזירה סתומה</u>

נניח כי $F_{(x,y)}$ גזירה ושהמשוואה $F_{(x,y)} = 0$ מגדירה את y כפונקציה גזירה של x . אז אז, בכל נקודה שבה $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$F_{(P,V)} = \left(P + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) - 82.06 \cdot T = 0 \qquad => \qquad \frac{dV}{dP} = -\frac{V - b}{P - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}}$$