עבור אילו ערכים של K, ע"פ מבחן הנגזרת השנייה, הפונקציה,

$$f(x,y)=x^2+Kxy+y^2$$

תיתן אוכף בנקודה $(0,0)$?

מינימום בנקודה $(0,0)$?

או לא נדע.

יש לבחור תשובה אחת:

- a. $K<-2$ או $K>2$ לא יודעים
  $-2<K<2$ אוכף
  $K=\pm2$ מינימה
- b. $K<-2$ או $K>2$ אוכף
  $-2<K<2$ לא יודעים
  $K=\pm2$ מינימה
- c. $K<-2$ או $K>2$ מינימה
  $-2<K<2$ אוכף
  $K=\pm2$ לא יודעים
- d. $K<-2$ או $K>2$ אוכף
  $-2<K<2$ מינימום
  $K=\pm2$ לא יודעים

$$f_{(x,y)}=x^2+kxy+y^2$$

$$\begin{cases} f_x=2x+ky=0 \\ f_y=2y+kx=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-x)(k-2)=0 \\ (y+x)(k+2)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y=\pm x \quad or \quad k=\pm 2$$

$$f_{xx}=2 \quad , \quad f_{xy}=k \quad , \quad f_{yy}=2 \qquad \Rightarrow$$

$$f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2 = 4-k^2$$

$$Saddle: \quad 4-k^2<0 \Rightarrow \quad k<-2 \ or \ 2<k$$

$$Extremum: \quad 4-k^2>0 \Rightarrow \quad -2<k<2$$

$$As\ f_{xx}>0 \quad it's\ a\ minimum$$

במצבי אוכף $(k<-2 \ \ or\ \ 2<k)$:

כאשר $2<k$ הישר $y=-x$ קמור בעוד הישר $y=x$ קעור.

כאשר $k<-2$ הישר $y=x$ קמור בעוד הישר $y=-x$ קעור.

במצבי קיצון $(-2<k<2)$ מתקבל מינימום בראשית הצירים.

כאשר $k=\pm2$ מתקבל $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=0$, מצב שאינו חד משמעי ע"פ מבחן הנגזרת השנייה.

אם כך, התשובה הנכונה היא d .

הערה:

כאשר $k=2$ מתקבל אומנם $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=0$ אשר אינו חד משמעי ע"פ מבחן הנגזרת השנייה,
אך מצד שני מתקבל אז $f_{(x,y)}=(x+y)^2$ ולכן ברור שהישר $y=-x$ מהווה מינימום ("תעלה").

כאשר $k=-2$ המצב דומה, אלא שכעת מתקבל $f_{(x,y)}=(x-y)^2$ ולכן זהו הישר $y=x$ אשר מהווה מינימום.

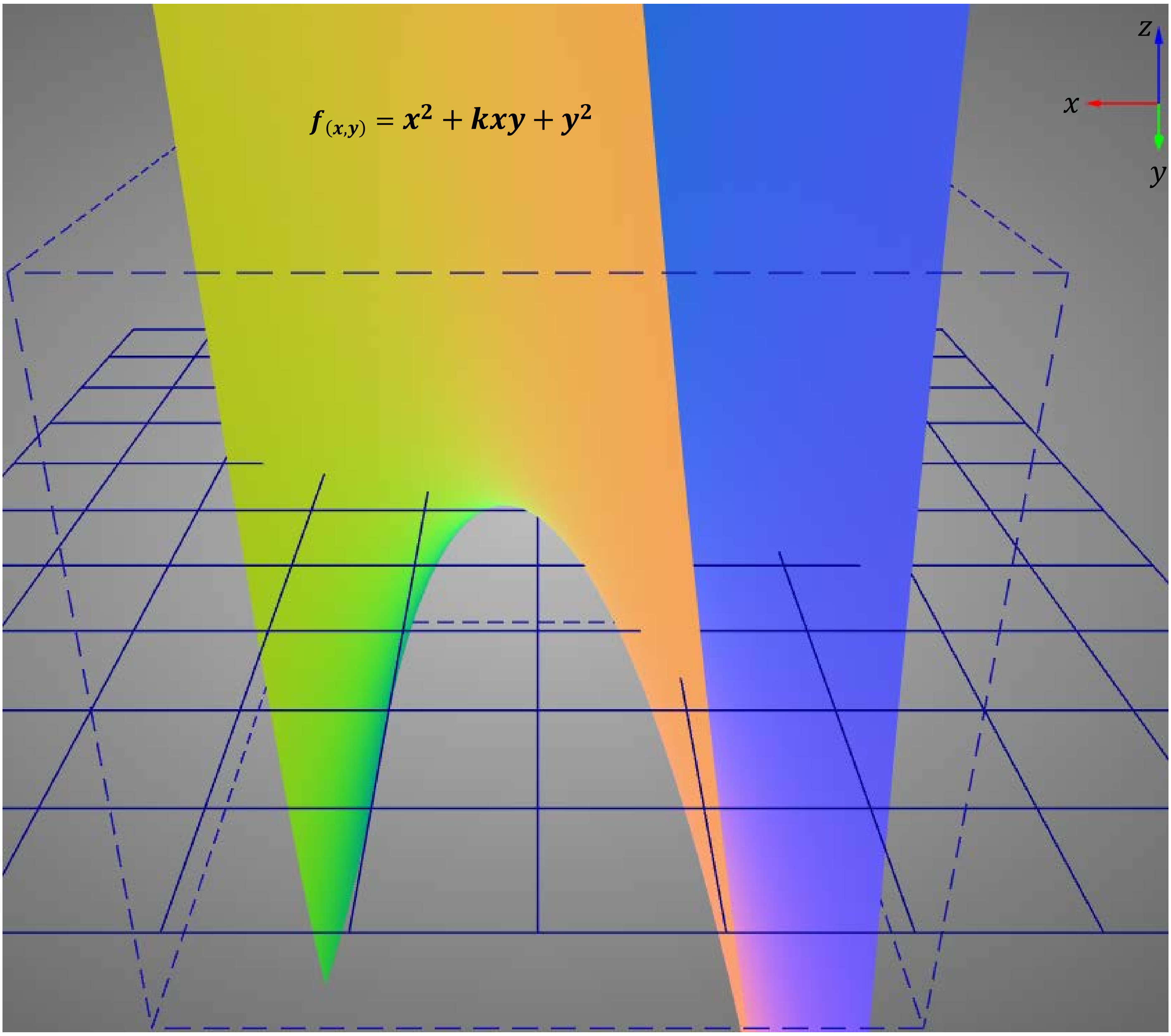
גרפים מתאימים ניתן לראות בעמודים הבאים.

תיאורמה 11 – מבחן הנגזרת השנייה לערכי קיצון מקומיים

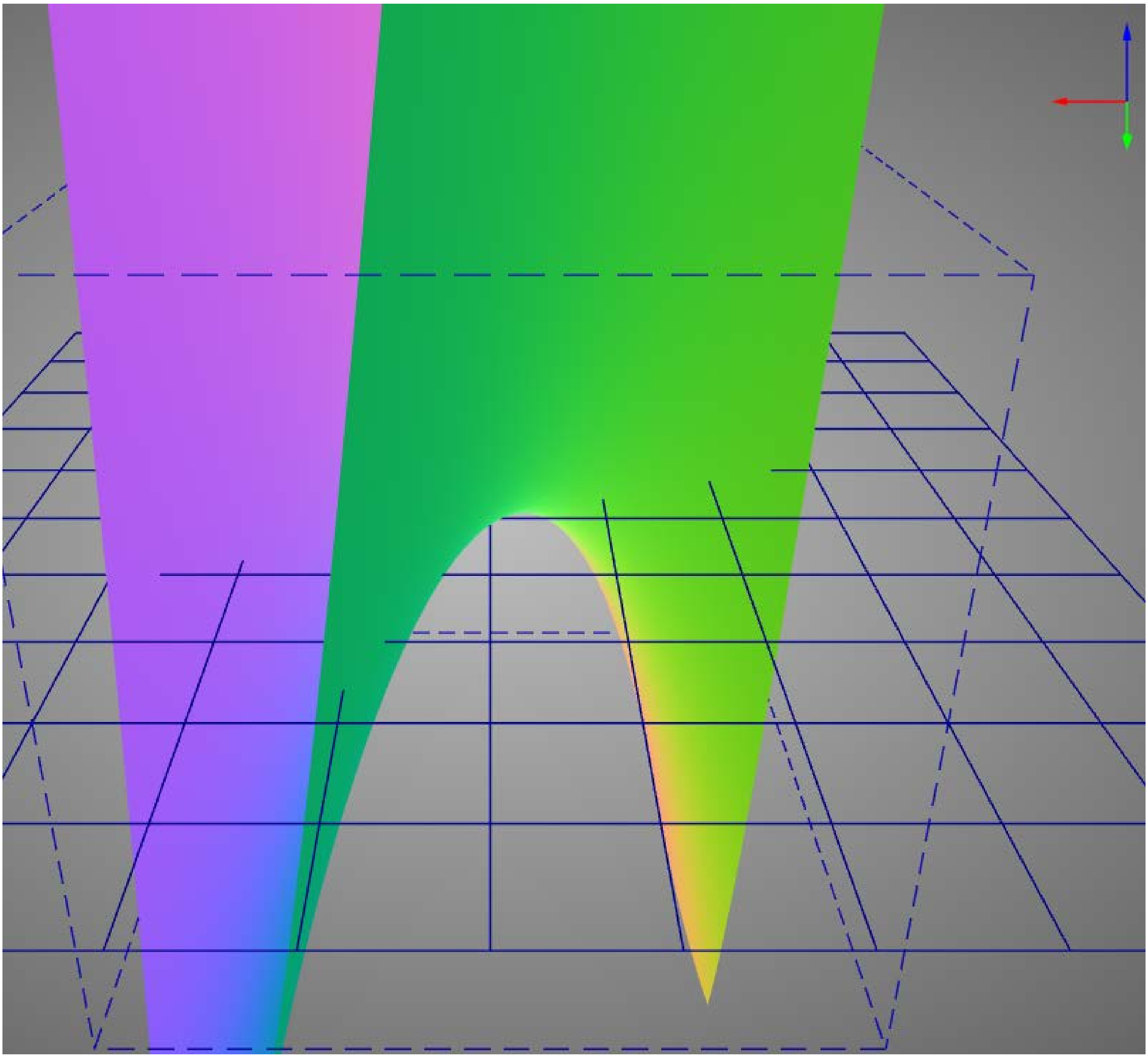
נניח ש- $f_{(x,y)}$ ונגזרותיה החלקיות הראשונות והשניות רציפות על פני דסקה פתוחה שמרכזה (a,b), וש- $f_{x(a,b)}=f_{y(a,b)}=0$. אז אם,

1) ל- f יש מקסימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx}<0$ ו- $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2>0$ ב- (a,b) .
2) ל- f יש מינימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx}>0$ ו- $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2>0$ ב- (a,b) .
3) ל- f יש נקודת אוכף ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2<0$ ב- (a,b) .
4) המבחן אינו חד משמעי ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=0$ ב- (a,b) .

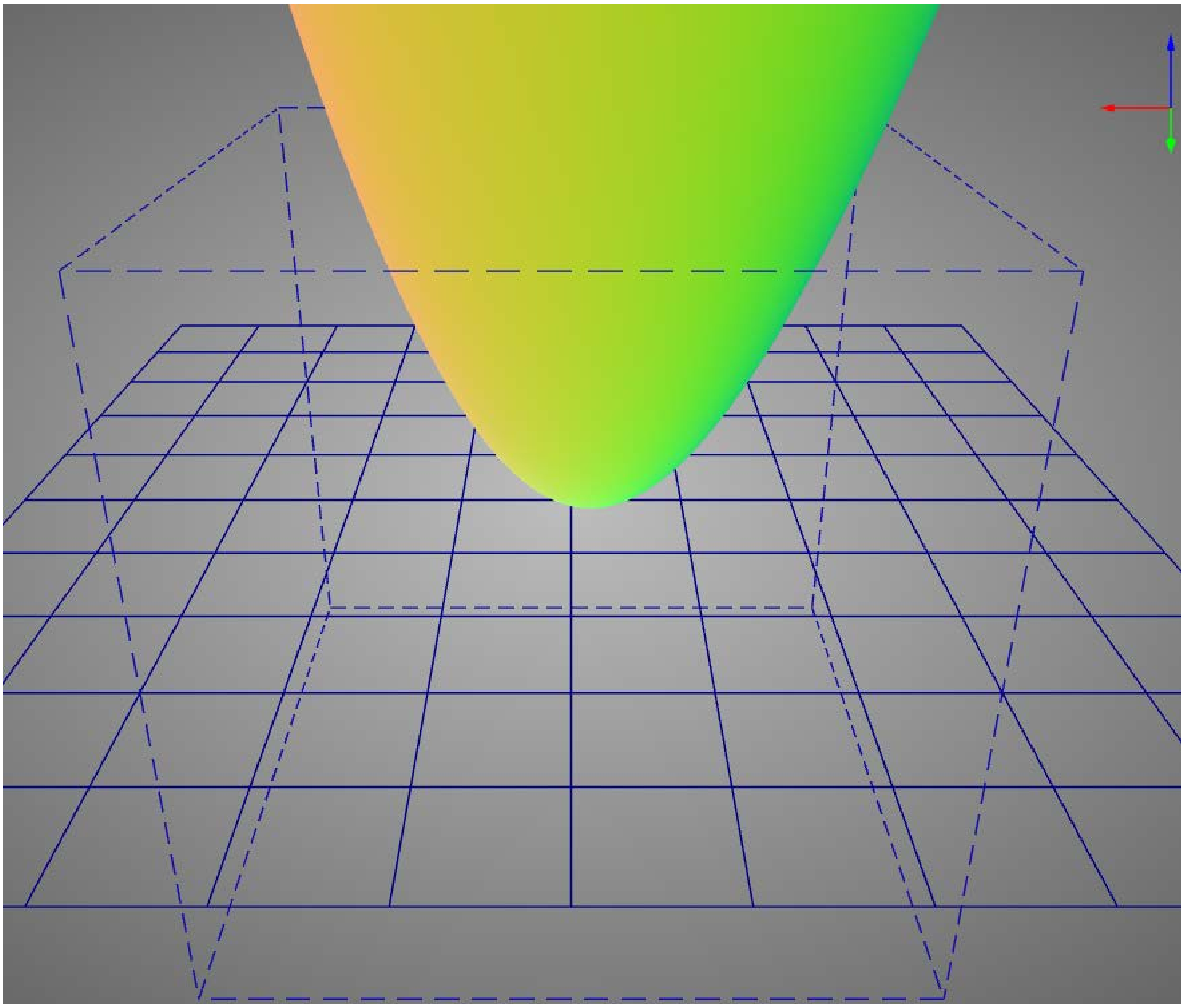
כאשר $k > 2$ מתקבל אוכף בו הישר $y = -x$ קמור בעוד הישר $y = x$ קעור.



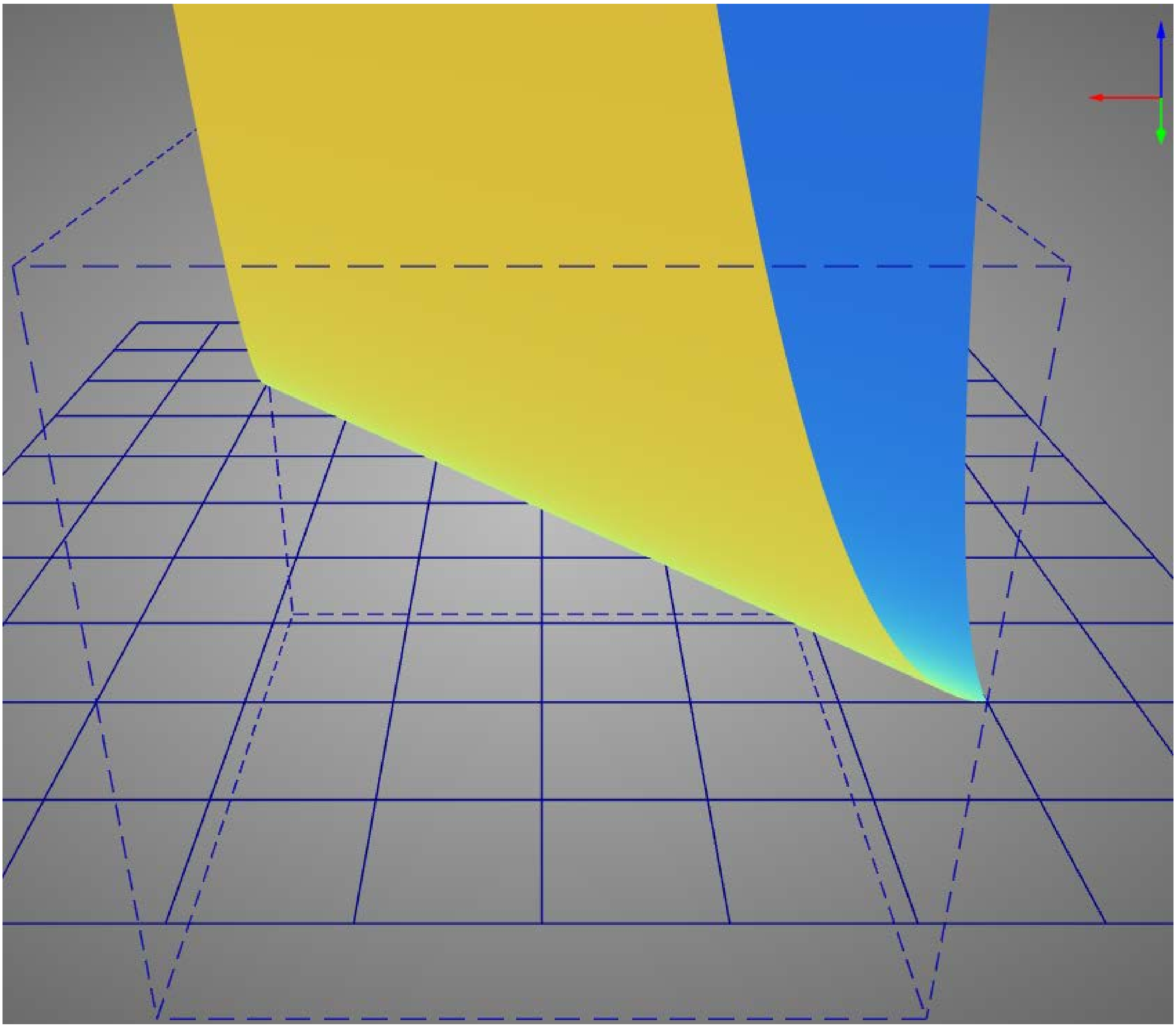
כאשר $k < -2$ מתקבל אוכף בו הישר $y = x$ קמור בעוד הישר $y = -x$ קעור.



כאשר $-2 < k < 2$ מתקבל מינימום בראשית הצירים.



כאשר $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$ מתקבל מינימום מסוג "תעלה" על הישר $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$.



כאשר $\boldsymbol{k = -2}$ מתקבל מינימום מסוג "תעלה" על הישר $\boldsymbol{y = x}$.