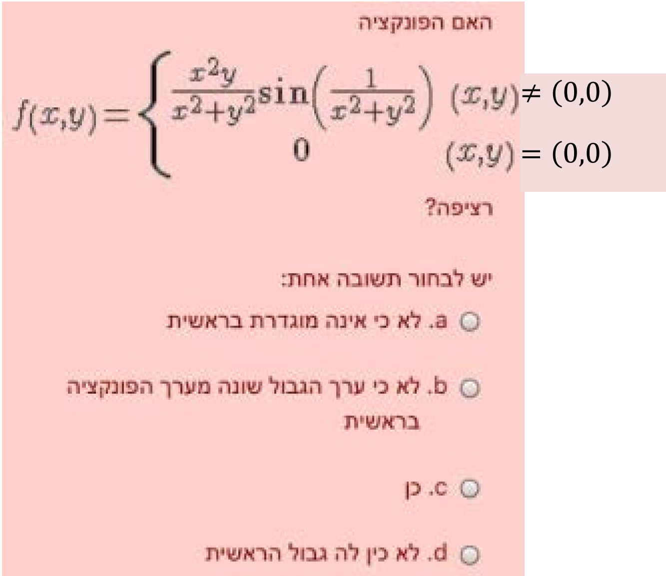

האם הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה?

יש לבחור תשובה אחת:

- a. לא כי אינה מוגדרת בראשית
- b. לא כי ערך הגבול שונה מערך הפונקציה בראשית
- c. כן
- d. לא כין לה גבול הראשית

כדי שתהא רציפה, גבול הפונקציה כאשר $(x,y)\to(0,0)$ צריך להיות שווה לערך הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{(x,y)} = \left[\frac{0}{0}\cdot bounded\right] \quad = \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

אם הגבול הראשון במכפלה הנ"ל שווה אפס אז מכפלת הגבולות שווה אפס, כי הביטוי שבגבול השני הינו חסום.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad = \quad \lim_{(r,\theta)\to(0,\theta)} \frac{r^2cos^2\theta\cdot r\sin\theta}{r^2} \quad = \quad \lim_{(r,\theta)\to(0,\theta)} (r\sin\theta\, cos^2\theta) \quad = 0$$

ובכן,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{(x,y)} = 0 = f_{(0,0)}$$

ואם כך הפונקציה הנתונה הינה רציפה.

בגרף אפשר לראות שכאשר $(x,y)\to(0,0)$ גם $z\to0$ מכל כיוון , ז"א הגבול קיים ושווה אפס.