מתוך פיתוח לטור מקלורן של arctgx, מצא את $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

תשובה:

יש לבחור תשובה אחת:

a. $\frac{\pi}{4}$

b. $45^o$

c. $-\frac{\pi}{4}$

d. $\pi$

$$\tan^{-1} x = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

אם נציב $x = 1$ בטור החזקות של $\tan^{-1} x$ , נקבל את הטור הנתון בשאלה:

$$\tan^{-1} 1 = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

אם כך, הטור הנתון בשאלה שווה ל- arctg(1), ז"א ל- $\frac{\pi}{4}$

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$$