חשב את $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ בעזרת פיתוח לטור מקלורן של $\sin x$ עד $n=8$.

תשובה: 0.946

$$\sin x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = \int \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} =$$

$$= x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35280} + \frac{x^9}{3265920} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \cdots$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\Bigg|_0^1 = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

נראה שהכוונה כאן היא לשמונת האיברים הראשונים של הטור כולל אלה אשר שווים ל- 0, ז"א לארבעת האיברים הראשונים של הטור אשר שונים מ- 0.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \sum_0^3 \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} = 1 - \frac{1^3}{18} + \frac{1^5}{600} - \frac{1^7}{35280} = 0.9460827664$$

האיבר החמישי, $\frac{1^9}{3265920}$, שהינו הראשון שלא הוכנס כאן לסכום, קטן מאחד חלקי מליון, ולכן קיבלנו טעות קטנה מאחד חלקי מליון, ז"א דיוק של שש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

זאת על פי כלל לייבניץ לטורים מתחלפים מתכנסים, האומר שהאיבר הראשון בשארית גדול מהשארית כולה, ז"א גדול מהטעות החישובית.