

מצא את שלושת האיברים הראשונים בפיתוח של $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ לטור מקלורן.

מהו $f(1)$ בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה?

תשובות:

יש לבחור תשובה אחת:

a. $f(1) = \frac{7}{6}, x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

b. $f(1) = \frac{5}{6}, x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

c. $f(1) = \frac{17}{18}, x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}$

d. $f(1) = \frac{19}{18}, x + \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\frac{\sin t}{t} \approx \frac{t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \approx \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}\right) dt = t - \frac{t^3}{18} + \frac{t^5}{600} \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}$$

$$f(1) \approx 1 - \frac{1^3}{18} + \frac{1^5}{600}$$

כמה איברים ראשונים יש לכלול בסכום כדי שהטעות תהיה קטנה ממאית (דיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה)?

על פי כלל לייבניץ לטורים מתחלפים מתכנסים, האיבר הראשון בשארית גדול מהשארית כולה (ז"א גדול מהטעות). עלינו לחפש את האיבר הראשון בטור שגודלו קטן ממאית והוא יהיה האיבר הראשון בשארית.

$\frac{1^5}{600}$ הוא האיבר הראשון אשר קטן ממאית, ולכן עליו להיות האיבר הראשון בשארית.

אם כן, כדי שהטעות תהיה קטנה ממאית, מספיק לקחת כאן שני איברים ראשונים.

$$f(1) \approx 1 - \frac{1^3}{18} = \frac{17}{18}$$