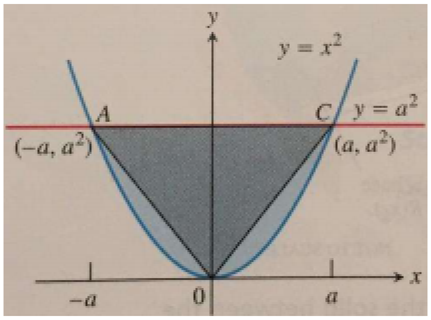
חלק א׳: 45 דקות באופן מקוון.




א. **גבול ושימושי האינטגרל**: נתונה הפרבולה $y= x^2$. נתון קו ישר החותך את הפרבולה $y= a^2$. בתוך הפרבולה נוצר המשולש AOC. יש למצוא את הגבול של היחס בין שטח המשולש (מונה) לשטח הכלוא בתוך הפרבולה ומתחת לישר (מכנה) כאשר $a$ שואף לאפס. 20 נקודות.

פיתרון:

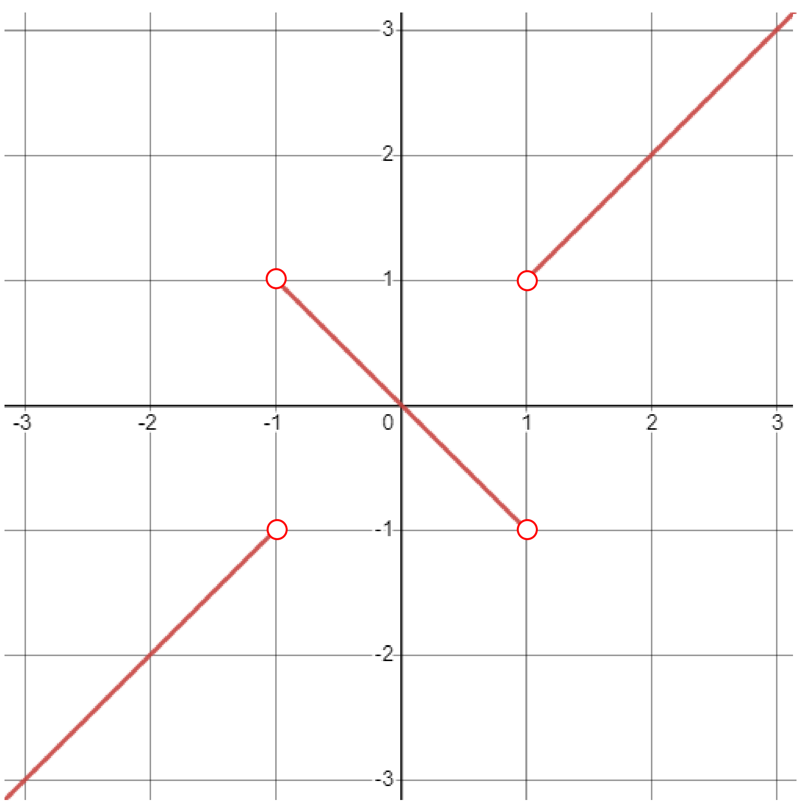
$$S_{\Delta AOC} = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{2a \cdot a^2}{2} = a^3$$

$$S_{parab} = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx = -2\int_{0}^{a} (x^2 - a^2)dx = -2\left[\frac{x^3}{3} - a^2 x\right|_0^a = -2\left[\frac{a^3}{3} - a^3 - 0\right] = \frac{4a^3}{3}$$

$$\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{parab}} = a^3 \cdot \frac{3}{4a^3} = \frac{3}{4} \quad => \quad \lim_{a\to 0}\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{parab}} = \lim_{a\to 0}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

ב. **חקירת פונקציה:**

יש לצייר את גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$. 10 נקודות.



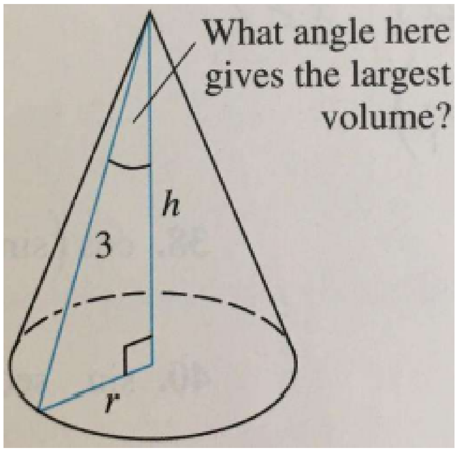

פיתרון:

עבור $1 < x$ או $x < -1$ אין משמעות לערך המוחלט, ולאחר צמצום אנו נותרים עם $\boldsymbol{y = x}$.

עבור $-1 < x < 1$ יש משמעות לערך המוחלט, ולאחר צמצום אנו נותרים עם $\boldsymbol{y = -x}$.

עבור $\boldsymbol{x = \pm 1}$ הפונקציה אינה מוגדרת.

$$f_{(x)} = \begin{cases} x & , \quad x < -1 \;\; or \;\; 1 < x \\ -x & , \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$




ג. **שימושי הנגזרת, חקירת פונקציות: בעיית מקסימיזציה, כלל השרשרת:**

מהי הזווית, המסומנת בציור, הדרושה כדי למקסם את נפח החרוט? 20 נקודות.

פיתרון:

נפחו של החרוט הוא שליש של מכפלת גובהו בשטח בסיסו:

$$V_{(h,r)} = \frac{\pi}{3} h r^2$$

מפיתגורס: $r^2 = 9 - h^2$

$$V_{(h)} = \frac{\pi}{3} h(9 - h^2) = \frac{\pi}{3}(9h - h^3) \quad => \quad \left[\frac{dV}{dh}\right]_{(h)} = \frac{\pi}{3}(9 - 3h^2) = \pi(3 - h^2)$$

מטריגו אנו יודעים כי $h = 3\cos\theta$

נציב זאת בביטוי שקיבלנו קודם, וכך נבטא את $\frac{dV}{dh}$ כפונקציה של θ במקום כפונקציה של $h$:

$$\left[\frac{dV}{dh}\right]_{(\theta)} = \pi(3 - 9cos^2\theta) = 3\pi(1 - 3cos^2\theta)$$

כעת נגזור את $h$ לפי θ :

$$\frac{dh}{d\theta} = -3\sin\theta$$

על פי כלל השרשרת:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{d\theta} = 3\pi(1 - 3cos^2\theta)[-3\sin\theta] = 9\pi\sin\theta\,(3cos^2\theta - 1)$$

נשווה את הנגזרת לאפס לצורך מציאת נקודות קיצון:

$$9\pi\sin\theta\,(3cos^2\theta - 1) = 0$$

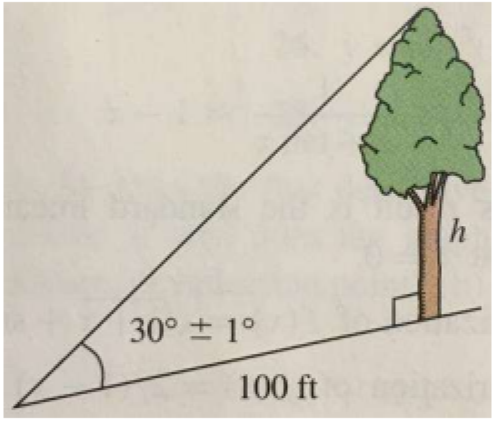
שימו לב שמ- $\sin\theta = 0$ לא מתקבל פיתרון רלוונטי, לכן נתעלם מאפשרות זו.

$$3cos^2\theta - 1 = 0 \quad => \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad => \quad \theta = 54.736°$$

ובכן, כדי למקסם את נפח החרוט, על הזווית המסומנת בציור להיות בת $54.736°$

חלק ב׳: 45 דקות באופן מקוון.

א. **שימושי הנגזרת**: כדי למצוא את גובהו של העץ, אנו מודדים את הזווית בין הקרקע לצמרתו מנקודה המרוחקת כדי 100 רגל מבסיסו של העץ. ציוד המדידה שלנו מאפשר מדידת זווית של $30^{\circ} \pm 1^{\circ}$. מהי השגיאה (אי הוודאות) במדידת גובהו של העץ בגלל השגיאה הזוויתית של $\pm 1^{\circ}$ ? לא לשכוח לעבוד ברדיאנים. יש להשתמש בחישוב זה בנגזרת. 10 נקודות.



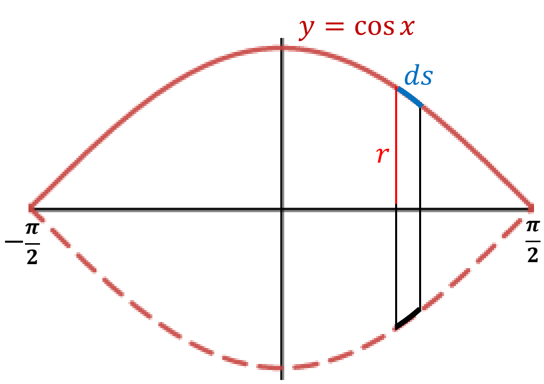

פיתרון:

$$h = 100\tan\theta \quad => \quad \frac{dh}{d\theta} = \frac{100}{cos^2\theta} \quad => \quad \frac{dh}{d\theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{100}{cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{400}{3}\ \frac{ft}{rad}$$

$$\Delta h = \frac{dh}{d\theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}} \cdot \Delta\theta = \frac{400}{3}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{20\pi}{27} \approx 2.33\ ft$$

ב. **שימושי האינטגרל – שטח פנים**: מהו שטח הפנים של הגוף שנוצר על ידי סיבוב העקומה y=cosx בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ סביב ציר x? יש לרשום את האינטגרל לפי המשתנה x בלבד. אין צורך לפתור את האינטגרל. 20 נקודות.

פיתרון:




מסיבובו של המיתר הקטנטן $ds$ סביב ציר ה- $x$ מתקבלת רצועת שטח $dA$

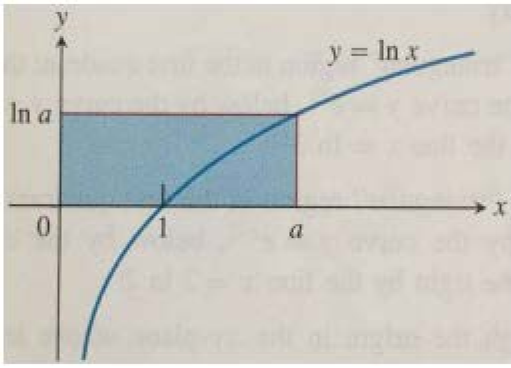
$$dA = 2\pi r \cdot ds = 2\pi y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \cos x \cdot \sqrt{1+sin^2x}\, dx$$

$$A = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cdot \sqrt{1+sin^2x}\, dx$$

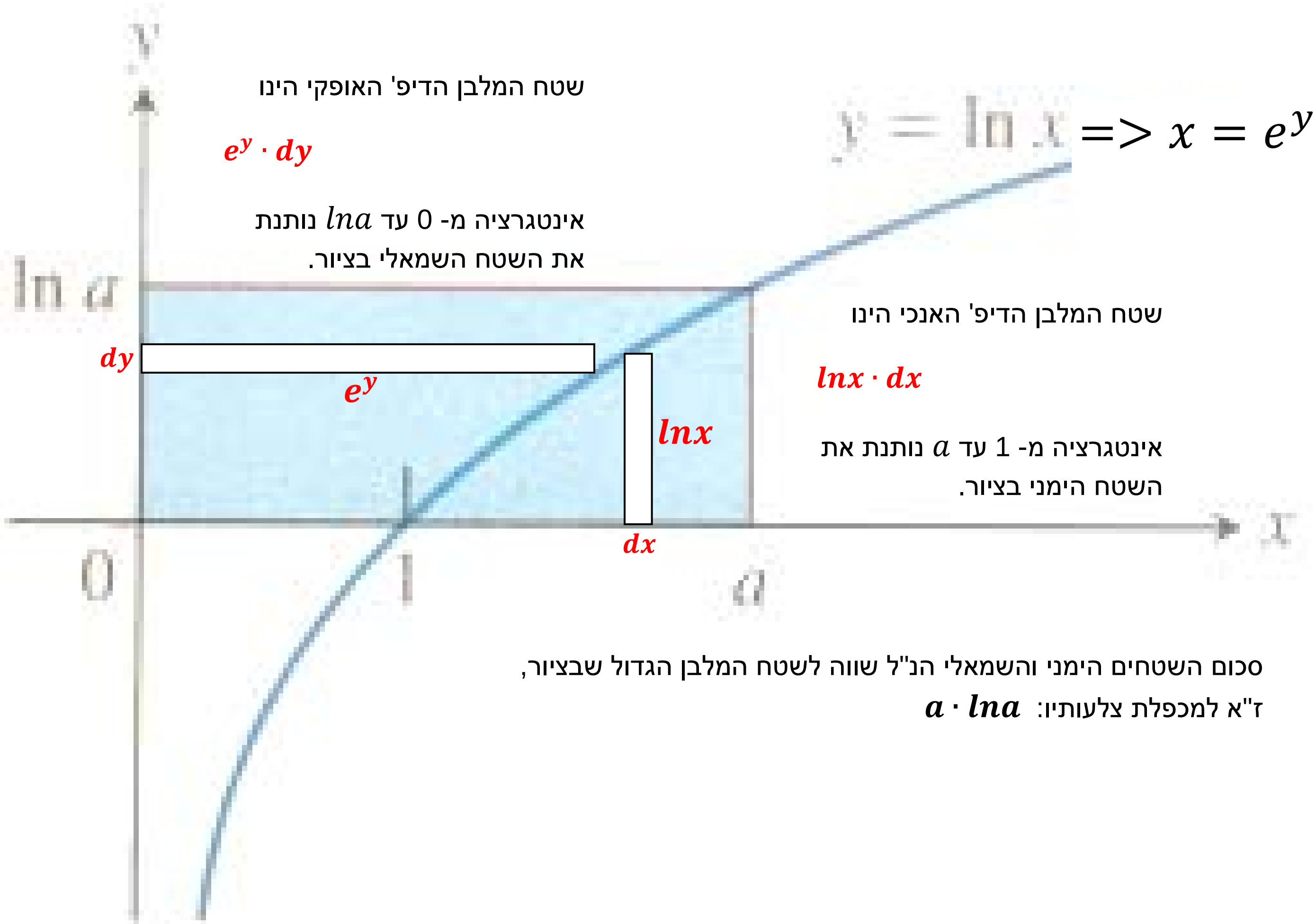
ג. **הבנת האינטגרל:**

יש להראות, בעזרת המלבן הדיפרנציאלי האופקי והאנכי, כי לכל a>1 מתקיים $\int_1^a lnx \cdot dx + \int_0^{lna} e^y \cdot dy = a \cdot lna$

20 נקודות.




פיתרון:




סכום השטחים הימני והשמאלי הנ"ל שווה לשטח המלבן הגדול שבציור,
ז"א למכפלת צלעותיו: $\boldsymbol{a \cdot lna}$