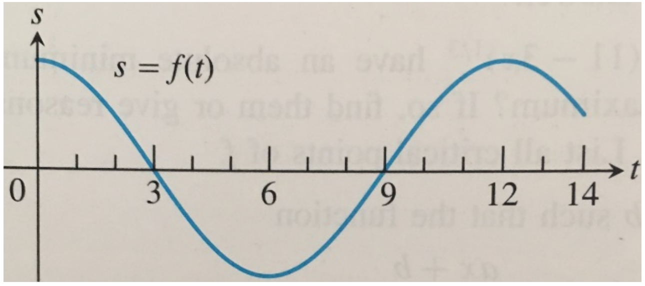
חלק א׳: 45 דקות באופן מקוון.

א. **מבחן הנגזרות וחקירת פונקציה**: מיקומו כתלות בזמן של גוף אשר נע על אחד הצירים, נתון על ידי $s = f(t)$.



מהו הזמן שבו

1) מהירותו שווה לאפס ?

2) תאוצתו שווה לאפס ?

3) באילו זמנים הגוף נע לפנים ?

4) באילו זמנים הגוף נע לאחור ?

פיתרון:

1) המהירות שווה לאפס כאשר השיפוע מתאפס, ז"א בנקודות הקיצון: $t = 0,6,12$

2) התאוצה שווה לאפס כאשר העקמומיות מתאפסת, ז"א בנקודות הפיתול: $t = 3,9$

3) הגוף נע לפנים כאשר השיפוע חיובי, ז"א כאשר $6 < t < 12$

4) הגוף נע לאחור כאשר השיפוע שלילי, ז"א כאשר $12 < t < 14$ או $0 < t < 6$

ב. **המשפט היסודי:**

נתון כי $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1$. יש למצוא את $f(x)$ ולהסביר את הדרך.

פיתרון:

שני אגפי המשוואה הם פונקציה של x. אם נגזור אותם לפי x, תתקבל באגף שמאל $f(x)$ ע"פ המשפט היסודי:

$$\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1 \quad => \quad \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 1) \quad => \quad f(x) = 2x - 2$$

ג. **שימושי האינטגרל**: מהו אורך הקשת $y = x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}$ בתחום $[1,4]$?

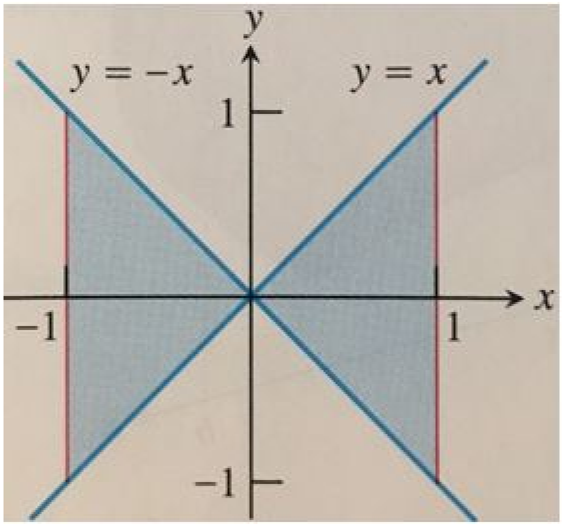
פיתרון:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}} \quad => \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{4x} \quad =>$$

$$=> \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{4x} = \frac{(x+1)^2}{4x} \quad => \quad ds = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$S = \int_1^4 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3} + \sqrt{x}\right|_1^4 = \left[\left[\frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{1}{3} + 1\right)\right]\right] = 3\frac{1}{3}$$

חלק ב׳: 45 דקות באופן מקוון.



א. **הבנת האינטגרל**: מי מבין האינטגרלים הבאים, אם בכלל,
נותן לנו את השטח הכלוא המוראה בציור? בבקשה להסביר.

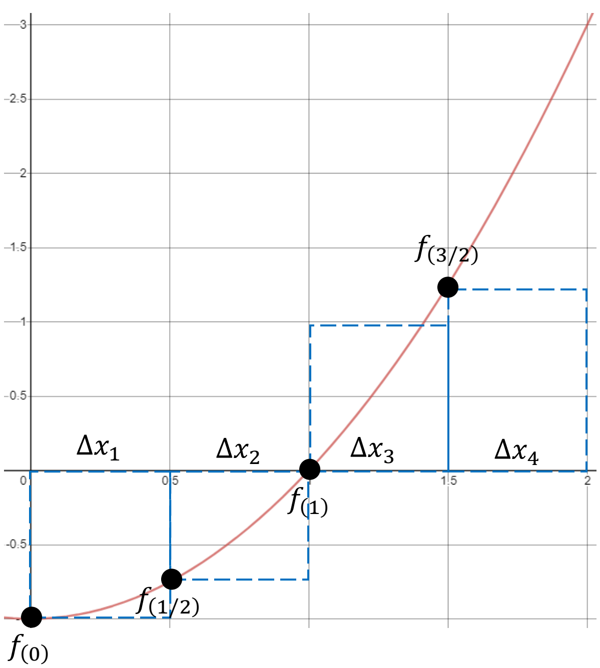
1) $\int_{-1}^{1}(x-(-x))dx = \int_{-1}^{1} 2xdx$

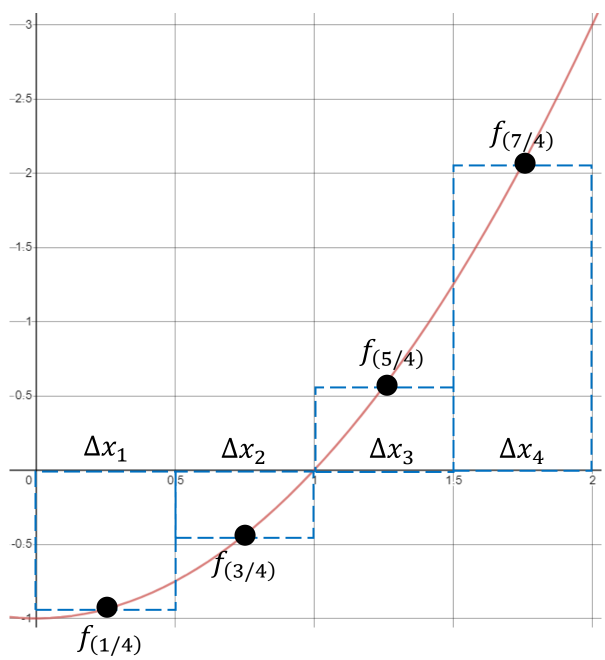
2) $\int_{-1}^{1}(-x-(x))dx = \int_{-1}^{1} -2xdx$

תשובה: אף אחד מהם.
הראשון רלוונטי רק לתחום [0,1] ואילו השני רק לתחום [-1,0].
השטח הכלוא יתקבל אז מסכום שני האינטגרלים:

$$\int_{-1}^{0} -2xdx + \int_{0}^{1} 2xdx$$

ב. **סכום רימן**: יש לצייר את הפונקציה $y=x^2-1$ בתחום [0,2].
יש לחלק את התחום ל-4 מלבנים בעלי רוחב זהה.
יש לחשב, על פי רימן, את סכום שטחי המלבנים, $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k$, כאשר c_k הוא
1) קצה שמאלי של מלבן
2) נקודת האמצע של מלבן.
יש להכין שני ציורים נפרדים ולסמן במקווקו את המלבנים המתאימים.
פיתרון:





התחום מחולק לארבעה מלבנים <u>שווים ברוחבם</u>, ואם כך Δx_k (רוחבו של המלבן ה"k") הינו קבוע:

$$\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k \;=\; \Delta x_k \sum_{k=1}^{4} f(c_k)$$

במקרה דנן התחום המחולק הוא $[0,2]$ ולכן רוחבו של כל מלבן הוא $\Delta x_k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} f(c_k)$$

למקרה 1 (איור שמאלי - כאשר c_k הוא קצה שמאלי של מלבן):

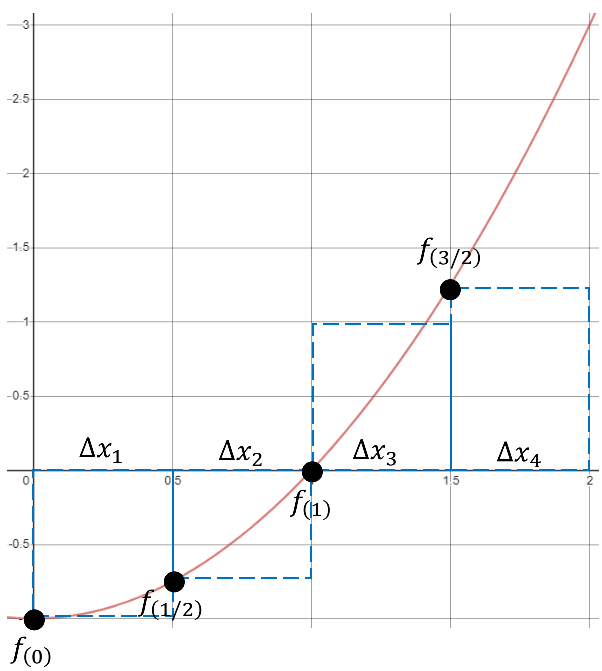
$$f_{(0)} = 0^2 - 1 = -1 \quad , \quad f_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4} \quad , \quad f_{(1)} = 1^2 - 1 = 0 \quad , \quad f_{\left(\frac{3}{2}\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$$

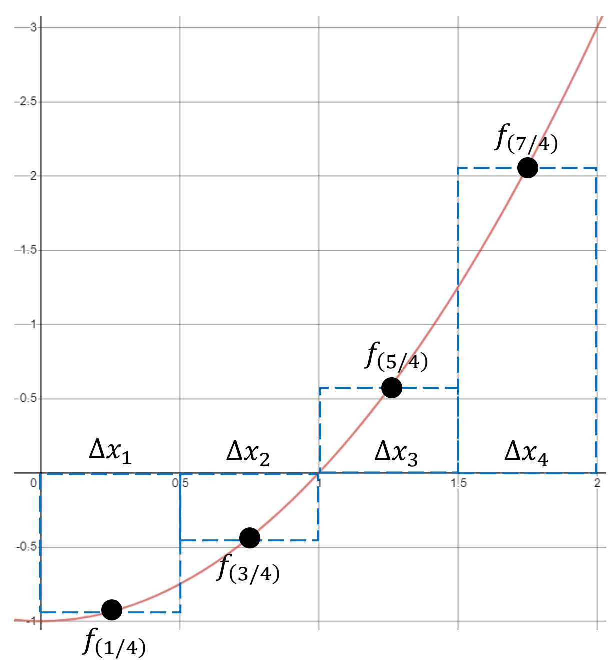
$$\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} f(c_k) \;=\; \frac{1}{2}\left(f_{(0)} + f_{\left(\frac{1}{2}\right)} + f_{(1)} + f_{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{3}{4} + 0 + \frac{5}{4}\right) \;=\; -\frac{1}{4}$$

למקרה 2 (איור ימני - כאשר c_k הוא אמצע של מלבן):

$$f_{\left(\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{15}{16} \quad , \quad f_{\left(\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{16} \quad , \quad f_{\left(\frac{5}{4}\right)} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{16} \quad , \quad f_{\left(\frac{7}{4}\right)} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 1 = \frac{33}{16}$$

$$\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} f(c_k) \;=\; \frac{1}{2}\left(f_{\left(\frac{1}{4}\right)} + f_{\left(\frac{3}{4}\right)} + f_{\left(\frac{5}{4}\right)} + f_{\left(\frac{7}{4}\right)}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(-\frac{15}{16} - \frac{7}{16} + \frac{9}{16} + \frac{33}{16}\right) \;=\; \frac{5}{8}$$





ג. **משוואה דיפרנציאלית ניתנת להפרדה:**

האבולוציה האנושית: מחקרים שנעשו על ידי Loring Brace ושותפיו במוזיאון לאנתרופולוגיה של אוניברסיטת מישיגן מראים כי גודלן של השיניים האנושיות ממשיך להתכווץ. ההנחה שקדמה למחקר זה סברה כי הפיזיולוגיה וגודלן של השיניים הגיעו לסוף התהליך האבולוציוני לפני כ-30,000 שנים. בצפון אירופה, למשל, גודלן של השיניים קטן בקצב של 1% לאלף שנים. אם t מייצג את הזמן בשנים ו-y את גודלן של השיניים, מה יהיה גודלן של שיני צאצאינו בעוד 20,000 שנים (באחוזים ביחס למצב היום)? שימו לב כי קצב השינוי בגודל השיניים יחסי לגודל השיניים עם מקדם יחס k-. תוכלו להשתמש בדף הנוסחאות. יש להסביר את הדרך.

פיתרון:

"קצב השינוי בגודל השיניים ($\frac{dy}{dt}$) יחסי לגודל השיניים (y) עם מקדם יחס k- " מתורגם למשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

כעת נפתור אותה באמצעות הפרדת המשתנים t ו- y :

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad => \quad \frac{dy}{y} = -kdt \quad => \quad \int_{y_{(t_0)}}^{y_{(t)}} \frac{dY}{Y} = -k\int_{t_0}^{t} dT \quad =>$$

$$=> \quad lnY\Big|_{y_{(t_0)}}^{y_{(t)}} = -kT\Big|_{t_0}^{t} \quad => \quad ln\frac{y_{(t)}}{y_{(t_0)}} = -k(t-t_0) \quad => \quad \frac{y_{(t)}}{y_{(t_0)}} = e^{-k(t-t_0)}$$

"קטן בקצב של 1% לאלף שנים" משמעו $k = 0.01$ כאשר t נמדד באלפי שנים:

$$\frac{y_{(20)}}{y_{(0)}} = e^{-0.01(20)} = e^{-0.2} = 0.81873 = 81.873\%$$

בעוד 20,000 שנים יהיה גודלן של שיני צאצאינו 81.873% מגודלן כעת, ז"א יפחת בכמעט 18%.