האם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ מתכנס?

יש לבחור תשובה אחת:

- a. מתכנס לערך נמוך מ- 4
- b. מתכנס לערך נמוך מ- 2
- c. מתכנס לערך נמוך מ- 3
- d. מתבדר

פיתרון :

בתחום $1 \le x \le \infty$, $g_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ (p=1.5) מהווה "גג קרוב" לאינטגרנד הנתון $f_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}$ (ראה גרף).

מהנוסחה שפיתחנו בכיתה לאינטגרל P בתחום $1 \le x \le \infty$, מתקבל $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{P-1} \quad => \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \frac{1}{1.5-1} = 2$

אם כך, $\int_1^\infty f_{(x)}\,dx < 2$

נותר למצוא "גג קרוב" לאינטגרנד הנתון בתחום $0 < x \le 1$, בתחום זה הגג שמצאנו קודם אינו "קרוב".

$u_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ הוא גג מוצלח בתחום זה, נחשב את האינטגרל שלו בתחום:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\lim_{a\to0^+}\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2\lim_{a\to0^+}(1-\sqrt{a}) = 2$$

אם כך, $\int_0^1 f_{(x)}\,dx < 2$

לסיכום, $\int_0^\infty f_{(x)}\,dx < \int_0^1 u_{(x)}\,dx + \int_1^\infty g_{(x)}\,dx = 2 + 2 = 4$