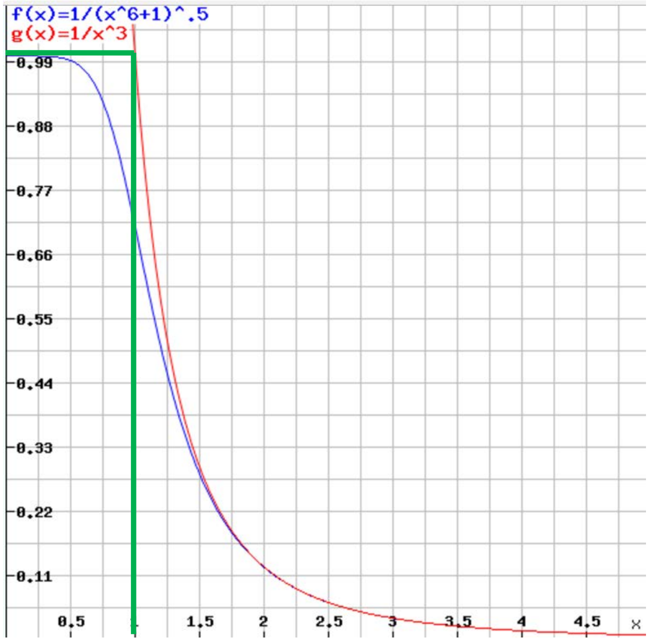
האם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$ מתכנס?

יש לבחור תשובה אחת:

- a. מתבדר
- b. לא ניתן לדעת
- c. מתכנס לערך קטן מ1.5



פיתרון:

בוודאי שמתכנס, כי הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x^6}}$ (P=3 > 1) מהווה "גג" לאינטגרנד $\frac{1}{\sqrt{x^6+1}}$.

נחשב את האינטגרל של ה"גג" בתחום $1 \le x < \infty$ (היכן שהוא מתפקד כ"גג" סביר) ונקבל שטח מוגזם עבור תחום זה:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} x^{-2}\Big|_1^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(b^{-2}-1\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^2}-1\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(0-1) = \frac{1}{2}$$

עבור התחום $0 \le x \le 1$ יש לבחור "גג" אחר (ה"גג" $\frac{1}{\sqrt{x^6}}$ מוגזם כאן לגמרי) - $y = 1$ מתאים כאן (מהציור קל להבין מדוע).

האינטגרל של ה"גג" $y = 1$ בתחום $0 \le x \le 1$ שווה לשטח המלבן (תכלס ריבוע) הירוק: **1**.

נחבר את שני השטחים המוגזמים שקיבלנו, ונקבל שטח מוגזם כולל: $\frac{1}{2} + 1 = 1.5$. תשובה C נכונה אם כך.