יהי $g(x)=\frac{x^2}{1+2x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ מהו a_1? מהו a_{11}?

רמז: בפיתוח של $g(x)$ היעזר בפיתוח לטור מקלורן של $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

רמז חלופי (פחות תרגולי): ל– $g_{(x)}$ יש תבנית של סכום סדרה הנדסית (טור הנדסי), אז מדוע לא לתקוף אותה ישירות? פיתרון בעמוד הבא.

יש לבחור תשובה אחת:

- a. $a_{11}=16, a_1=0$
- b. $a_{11}=-8, a_1=1$
- c. $a_{11}=16, a_1=1$
- d. $a_{11}=-8, a_1=0$

שימו לב!

a_1 משמעו כאן – המקדם של x^1.

a_{11} משמעו כאן – המקדם של x^{11}.

$$f_{(x)}=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)} \quad \to \quad a_1=1 \quad , \quad q=-x$$

$$a_n=a_1q^{n-1} \quad => \quad a_n=(-x)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot x^{n-1}$$

$$f_{(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$$

$$f_{(x)}=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n\cdot x^n+\cdots$$

$$u_{(x)}=\frac{1}{1+2x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(2x^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot x^{3n}$$

$$u_{(x)}=\frac{1}{1+2x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot x^{3n}=1-2x^3+4x^6-8x^9+\cdots+(-2)^n\cdot x^{3n}+\cdots$$

$$g_{(x)}=\frac{x^2}{1+2x^3}=x^2\cdot\frac{1}{1+2x^3}=x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot x^{3n}\cdot x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot x^{3n+2}$$

$$g_{(x)}=\frac{x^2}{1+2x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot x^{3n+2}=x^2-2x^5+4x^8-8x^{11}+\cdots+(-2)^n\cdot x^{3n+2}+\cdots$$

$$g_{(x)}=\frac{x^2}{1+2x^3}=0\cdot x^1+\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot x^{3n+2}=0\cdot x^1+x^2-2x^5+4x^8-8x^{11}+\cdots$$

עכשיו קצר ואלגנטי:

$$g_{(x)} = \frac{x^2}{1+2x^3} = \frac{x^2}{1-(-2x^3)} \quad \rightarrow \quad a_1 = x^2 \quad , \quad q = -2x^3$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad => \quad a_n = x^2(-2x^3)^{n-1} = (-2)^{n-1} \cdot (x^3)^{n-1} \cdot x^2 = (-2)^{n-1} \cdot x^{3n-1}$$

$$g_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n-1} \cdot x^{3n-1} = x^2 - 2x^5 + 4x^8 - 8x^{11} + \cdots + (-2)^{n-1} \cdot x^{3n-1} \ldots$$

$$g_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^{n} \cdot x^{3n+2} = x^2 - 2x^5 + 4x^8 - 8x^{11} + \cdots + (-2)^{n} \cdot x^{3n+2} \ldots$$

$$g_{(x)} = \frac{x^2}{1+2x^3} = 0 \cdot x^1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^{n} \cdot x^{3n+2} = 0 \cdot x^1 + x^2 - 2x^5 + 4x^8 - 8x^{11} + \cdots$$