התבונן בגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}$ ורשום אותו כסכום רימן המכיל את האינדקס K ואת מספר המלבנים n .

ציין מי הוא המשתנה x_k ומי הוא רוחב המלבן הדיפרנציאלי Δx .

רשום את האינטגרל המתאים וחשב אותו (התוצאה היא הערך של הגבול).

פיתרון:

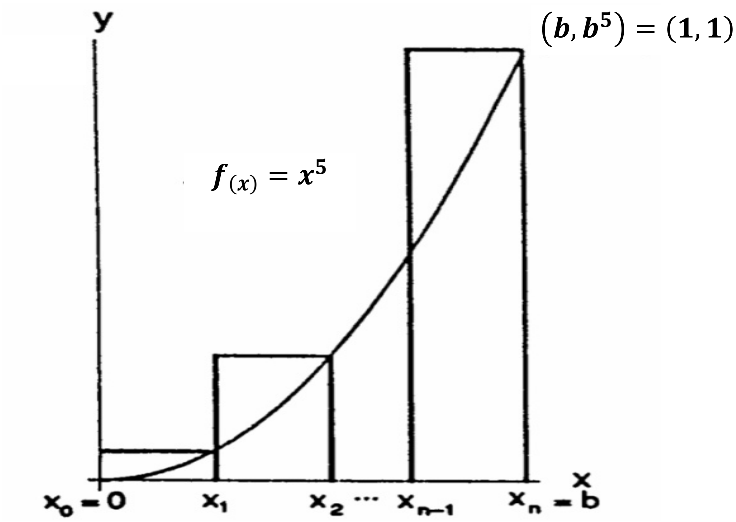
נלך ברוורס, מהסוף להתחלה:

$$\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6} = \frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^5}\cdot\frac{1}{n} = \left[\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{2}{n}\right)^5+\cdots+\left(\frac{k}{n}\right)^5+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^5\right]\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \left[(\Delta x)^5+(2\Delta x)^5+\cdots+(k\Delta x)^5+\cdots(n\Delta x)^5\right]\cdot\Delta x = \left[(x_1)^5+(x_2)^5+\cdots+(x_k)^5+\cdots(x_n)^5\right]\cdot\Delta x =$$

$$= (x_1)^5\cdot\Delta x+(x_2)^5\cdot\Delta x+\cdots+(x_k)^5\cdot\Delta x+\cdots(x_n)^5\cdot\Delta x = \sum_{k=1}^{n}(x_k)^5\cdot\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f_{(x_k)}\cdot\Delta x \quad => \quad f_{(x)}=x^5$$

אנו מבינים שמדובר כאן באינטרוול $[0,1]$, שכן $x_1=\Delta x$ ו- $\Delta x=\frac{1}{n}=\frac{b}{n}$



$$\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6} =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{2}{n}\right)^5+\cdots+\left(\frac{k}{n}\right)^5+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^5\right]\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\cdot\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}(x_k)^5\cdot\Delta x \quad =>$$

$$x_k = k\cdot\frac{1}{n} \quad , \quad \Delta x=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k)^5\cdot\Delta x = \int_0^1 x^5dx = \frac{x^6}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1^6-0}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}\ [Area\ Units]$$