נתון

$$x = \int_0^{y_{(x)}} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt$$

יש להראות שמתקיים $\frac{d^2y}{dx^2} = Ay_{(x)}$ ולחשב את A (מקדם הפרופורציה).

פיתרון:

על פי המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

$$x = \int_0^{y_{(x)}} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt \quad => \quad \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\int_0^{y_{(x)}} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{1+4y_{(x)}^2}}$$

היפוך קומות מניב

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+4y_{(x)}^2}$$

נגזור כעת את שני האגפים לפי x (גזירה סתומה שכן איננו יודעים מהי $y_{(x)}$) ונקבל את $\frac{d^2y}{dx^2}$ כביטוי סתום

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4y_{(x)}}{\sqrt{1+4y_{(x)}^2}} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{4y_{(x)}}{\sqrt{1+4y_{(x)}^2}} \cdot \sqrt{1+4y_{(x)}^2} = 4y_{(x)}$$

איננו יודעים אומנם מהי $y_{(x)}$, אבל קיבלנו את הקשר (הליניארי) שבין $\frac{d^2y}{dx^2}$ לבין $y_{(x)}$ וזה מספיק לענייננו:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4y_{(x)} \quad => \quad A = 4$$

אגב, אפשר למצוא בקלות את $x_{(y)}$, אבל לא את $y_{(x)}$:

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1+4y_{(x)}^2}} dy \quad =>$$

$$x_{(y)} = \int \frac{1}{\sqrt{1+4y_{(x)}^2}} dy = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{(2y)^2+1}} dy = \frac{1}{2} ln\left|2y + \sqrt{(2y)^2+1}\right| + C$$