צייר את העקומה $f_{(x)} = \left(x^2 - 1\right)^{1/3}$ תוך התייחסות לנקודות הבאות:

א) תחום הגדרה
ב) זוגיות
ג) עליה וירידה, נקודות קיצון אם קיימות וטיבן, מה קורה לנגזרת הראשונה כאשר $x = \pm 1$? מהי המשמעות?
ד) נקודות פיתול אם קיימות והנושא של קעירות וקמירות.
ה) $\lim_{x\to\pm\infty} f_{(x)} = ?$
ו) נקודות חיתוך עם הצירים וסרטוט של גרף הפונקציה.

פיתרון:

א) תחום הגדרה: כל X , ז"א $D: (-\infty, \infty)$
ב) הפונקציה זוגית כי $f_{(-x)} = f_{(x)}$ ולפיכך יהיה הגרף שלה סימטרי לציר ה- Y .
ג) הנגזרת הראשונה:

$$f'_{(x)} = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-2/3} \cdot 2x = \frac{2x}{3(x^2-1)^{2/3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{(x^2-1)^{2/3}}$$

מכנה הנגזרת הראשונה מתאפס כאשר $x = \pm 1$ ומשמעות הדבר היא שנגזרת זו אינה מוגדרת כאשר $x = \pm 1$.
זאת למרות שהפונקציה כן מוגדרת (ואף רציפה) כאשר $x = \pm 1$.
$\lim_{x\to -1}\left[f'_{(x)}\right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, ז"א הפונקציה יורדת בשיפוע כה תלול עד שב- $x = -1$ המשיק לה הופך מקביל לציר Y.

$\lim_{x\to 1}\left[f'_{(x)}\right] = \frac{1}{0^+} = \infty$, ז"א הפונקציה עולה בשיפוע כה תלול עד שב- $x = 1$ המשיק לה הופך מקביל לציר Y.

הנגזרת עצמה מתאפסת כאשר $x = 0$ ולכן זוהי נקודה חשודה (קיצון או פיתול אגרסיבי שבו שיפוע הפונקציה מתאפס).
אבל אנו יודעים שב- $x = -1$ (ז"א משמאל ל- $x = 0$) הפונקציה יורדת, ושב- $x = 1$ (ז"א מימין ל- $x = 0$) היא עולה.
אם כך, כאשר $x = 0$ הפונקציה עוברת מירידה לעליה, וזוהי ההגדרה לנקודת מינימום. $(0\,, -1)$ **היא נקודת מינימום**.

ד) הנגזרת השנייה:

$$f''_{(x)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2-1)^{2/3} - \frac{2}{3}x(x^2-1)^{-1/3} \cdot 2x}{(x^2-1)^{4/3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot (x^2-1)^{2/3} - 4x^2(x^2-1)^{-1/3}}{3 \cdot (x^2-1)^{4/3}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3 \cdot (x^2-1)^{2/3} - \frac{4x^2}{(x^2-1)^{1/3}}}{(x^2-1)^{4/3}} =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{3 \cdot (x^2-1) - 4x^2}{(x^2-1)^{5/3}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{-x^2-3}{(x^2-1)^{5/3}} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}}$$

כאשר $f''_{(x)} > 0$ הפונקציה קעורה וכאשר $f''_{(x)} < 0$ היא קמורה. במקרה דנן המונה חיובי לכל X כך שאפשר להתעלם ממנו,
והמקדם שלילי כך שאפשר לחלק בו ולהפוך סימן, ז"א $f''_{(x)} > 0$ כאשר $x^2 - 1 < 0$ <= **קעירות** כאשר $-1 < x < 1$.
$f''_{(x)} < 0$ כאשר $x^2 - 1 > 0$ <= **קמירות** כאשר $x < -1 \;\; or \;\; 1 < x$.
כמו בנגזרת הראשונה, גם בנגזרת השנייה מתאפס המכנה כאשר $x = \pm 1$, ז"א היא אינה מוגדרת ב- $x = \pm 1$.
הדבר צפוי אם מכירים את המשפט "היכן שפונקציה אינה מוגדרת, גם נגזרותיה אינן מוגדרות".
למרות זאת, ב- $x = \pm 1$ ישנו פיתול בגרף הפונקציה כי ישנו שם מעבר "מקמירות לקעירות או להיפך" **והיא רציפה שם**.
$(1\,, 0)$ ו- $(-1\,, 0)$ הן נקודות פיתול אם כך.

ה)   כאן אנו מתבקשים בעצם למצוא לאן שואפת הפונקציה כאשר מתרחקים מאוד מציר Y.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_{(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2-1)^{1/3} = \infty$$

מצאנו שהפונקציה שואפת לאינסוף, ז"א הגרף מגיע לגובה אינסופי כאשר מתרחקים עד אינסוף ימינה או שמאלה.

ו)   את נקודות החיתוך עם הצירים מצאנו כבר "על הדרך" בסעיפים הקודמים: $(0,-1)$ $(1,0)$ ו- $(-1,0)$.