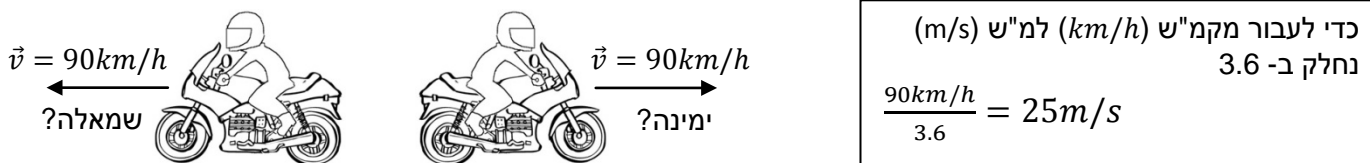


t : זמן, נמדד בשניות (s). t_0 מייצג את הרגע ההתחלתי, כשהופעל שעון העצר.
 \vec{X} : מיקום, נמדד במטרים (m). \vec{X}_0 מייצג את המיקום ברגע ההתחלתי t_0 .
 $\Delta\vec{X}$: העתק, השינוי במיקום $(X_f - X_i)$, נמדד במטרים (m).
 \vec{v} : מהירות (Velocity), קצב ההשתנות של המיקום, נמדדת במטרים לשנייה (m/s). \vec{v}_0 מייצג את המהירות ברגע ההתחלתי t_0 .
 $\Delta\vec{v}$: השינוי במהירות $(v_f - v_i)$, נמדד במטרים לשנייה (m/s).
 \vec{a} : תאוצה (acceleration), קצב ההשתנות של המהירות, נמדדת במטרים לשנייה בריבוע (m/s^2) .

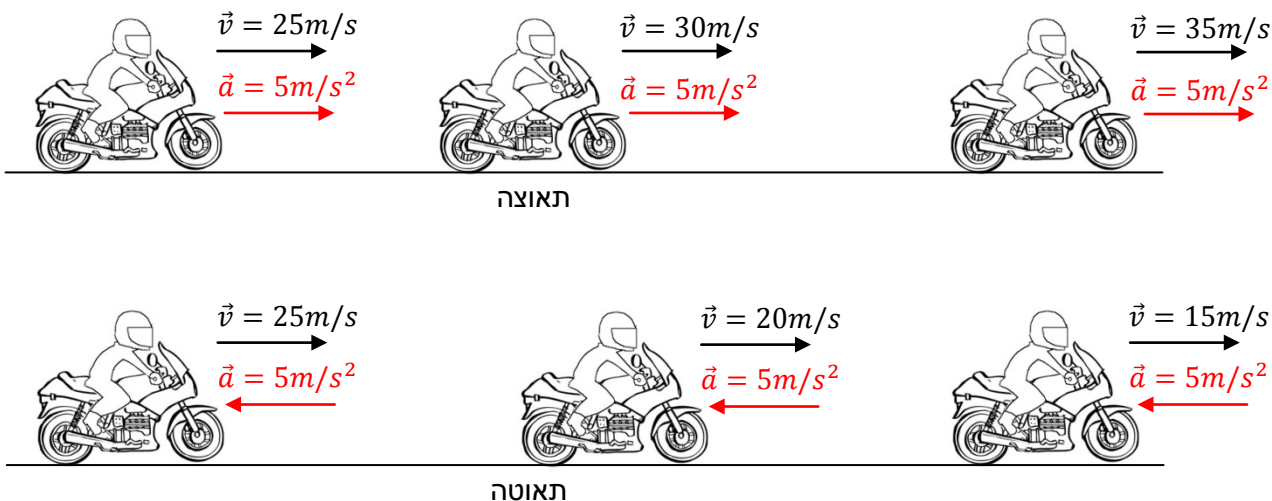
החץ הקטן שמעל לכינוי מצביע על כך שמדובר בווקטור, ז"א בגודל בעל כיוון. אם נאמר למשל שמיקומו של עץ יחסית לבית הינו 5m, מבלי לציין באיזה כיוון (ממזרח לבית, ממערב לבית וכיו"ב), הרי שהדיווח אינו שלם. באופן דומה, אם נאמר שהעתקו של כדור הינו 3m, מבלי לציין את הכיוון שבו הועתק הכדור, הרי שהמידע חסר.



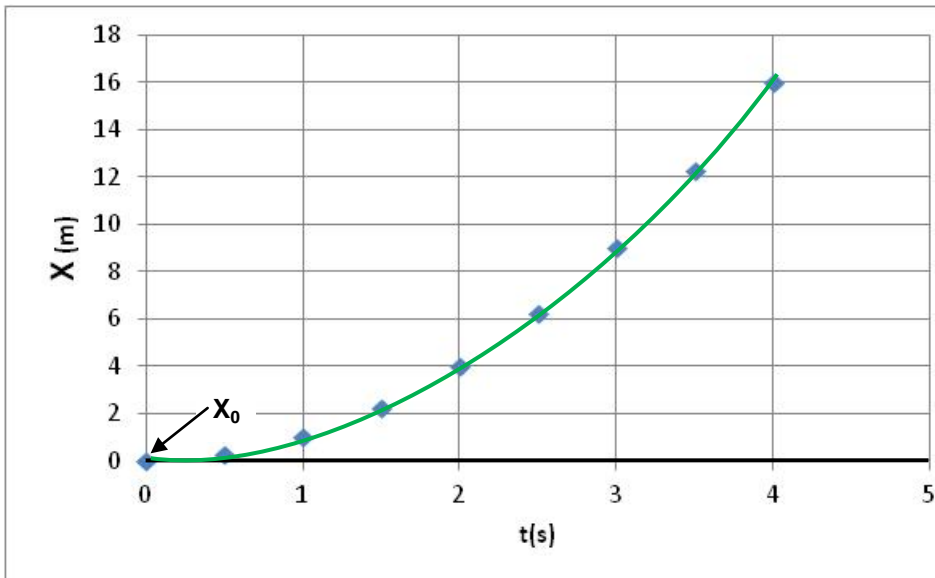
כשאנו מדברים על מהירותו של אופנוע, ברור שבנוסף לגודל יש לה גם כיוון: האופנוע נוסע במהירות שגודלה 90 קמ"ש נניח, אבל באיזה כיוון? שמאלה? ימינה?



אם האופנוע משנה את מהירותו, יש לו תאוצה. גודלה של התאוצה הוא הקצב שבו משתנה המהירות, וכיוונה של התאוצה הוא הכיוון שבו משתנה המהירות. אם האופנוע נע בקו ישר, מהירותו יכולה להשתנות בכיוון "קדימה" או בכיוון "אחורה". נניח שמהירות האופנוע גדלה ב- $5m/s$ בכל שנייה. גודלה של התאוצה במקרה זה הוא $5m/s^2$ וכיוונה קדימה, מפני שזהו הכיוון שבו משתנה המהירות. כעת נניח שמהירות האופנוע פוחתת ב- $5m/s$ בכל שנייה. גם עכשיו גודלה של התאוצה הוא $5m/s^2$, כמקודם, אך הפעם כיוונה הוא אחורה. מדוע? מפני שכעת זהו הכיוון שבו משתנה המהירות. התרשים הבא עוזר להבהיר זאת:



נבחן כעת את תלותם בזמן של המיקום (\vec{x}) והמהירות (\vec{v}) של גוף, תחת התנאי שתאוצתו (\vec{a}) קבועה ושהוא נע בקו ישר.



הקשר שבין המיקום לזמן הוא ריבועי (פרבולי):

$$X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

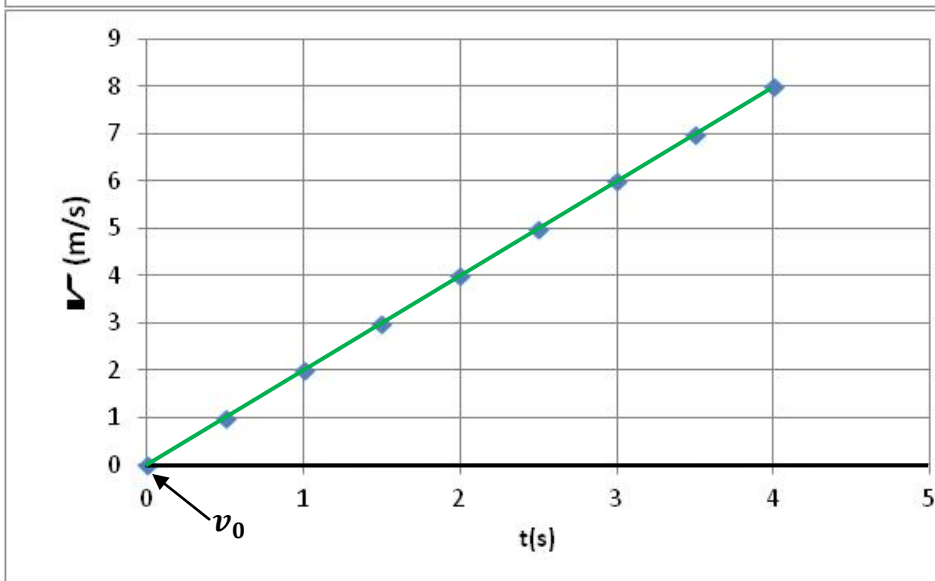
$$\underbrace{X(t) - X_0}_{\Delta X} = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

בגרף שמשמאל:

$$X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

↘ ↘ ↘
0 0 2

כך ש: $X(t) = t^2 (m)$



הקשר שבין המהירות לזמן הוא ליניארי (קווי):

$$v(t) = v_0 + at$$

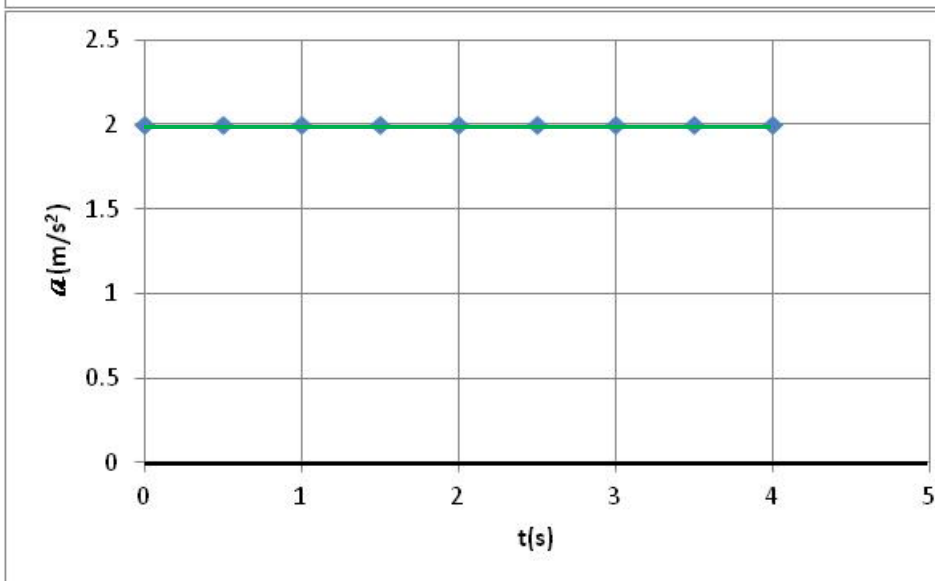
$$\underbrace{v(t) - v_0}_{\Delta v} = at$$

בגרף שמשמאל:

$$v(t) = v_0 + at$$

↘ ↘
0 2

כך ש: $v(t) = 2t \left(\frac{m}{s}\right)$



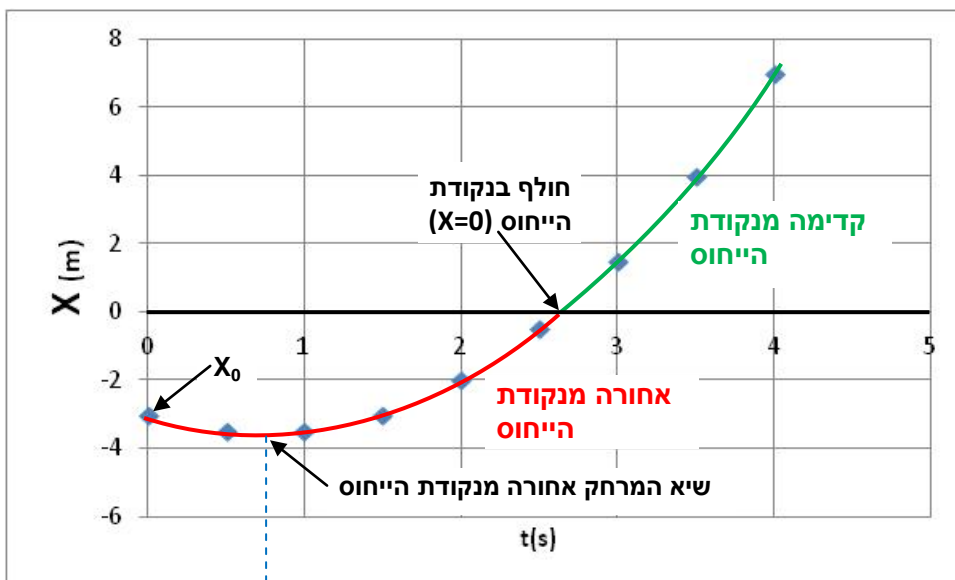
הקשר שבין התאוצה לזמן הוא ליניארי (קווי) אופקי:

$$a(t) = const.$$

בגרף שמשמאל:

$$a(t) = 2 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

נבחן כעת מקרה כללי יותר שבו תנאי ההתחלה שונים מאפס ($X_0 \neq 0$ $v_0 \neq 0$) וניכנס לפרטים המשתמעים מהגרפים.



הקשר שבין המיקום לזמן הוא ריבועי (פרבולי):

$$X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

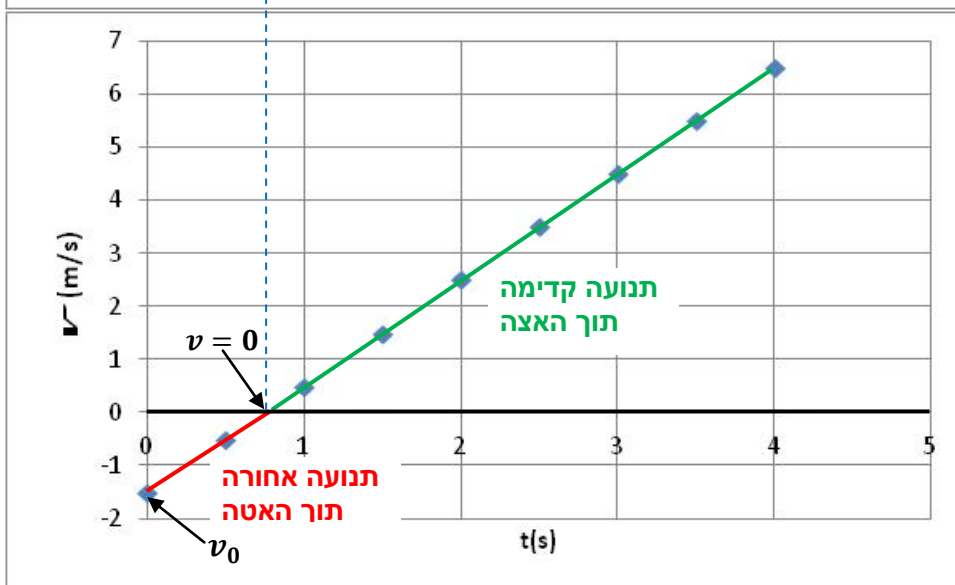
$$\underbrace{X(t) - X_0}_{\Delta X} = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

בגרף שמשמאל:

$$X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

-3 -1.5 2

$$X(t) = -3 - 1.5t + t^2 \text{ (m)}$$



הקשר שבין המהירות לזמן הוא ליניארי (קווי):

$$v(t) = v_0 + a t$$

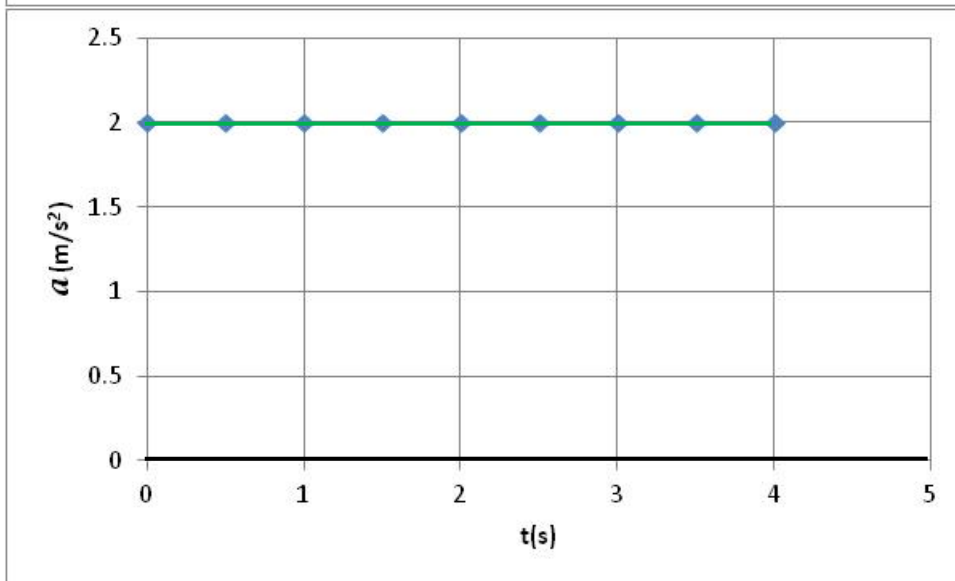
$$\underbrace{v(t) - v_0}_{\Delta v} = a t$$

בגרף שמשמאל:

$$v(t) = v_0 + a t$$

-1.5 2

$$v(t) = -1.5 + 2t \text{ (m/s)}$$



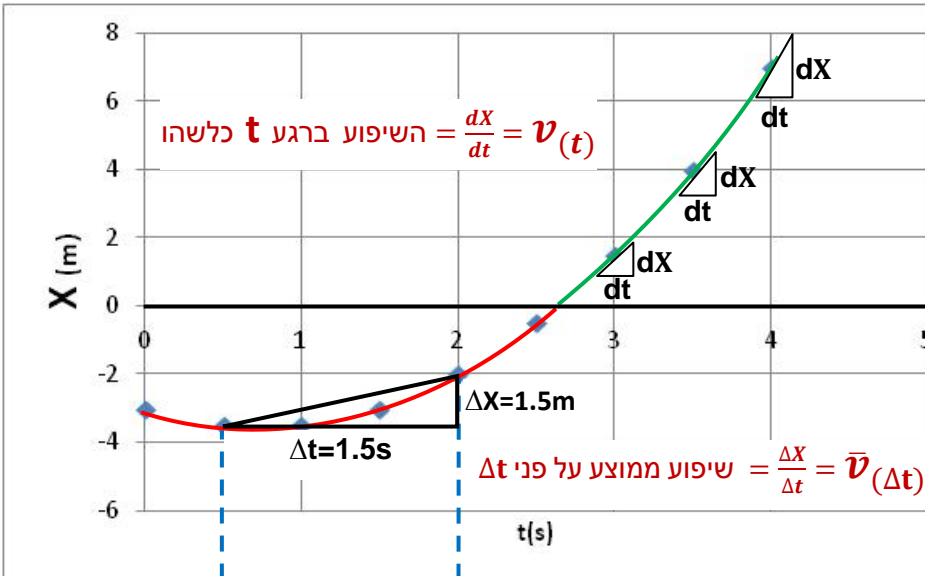
הקשר שבין התאוצה לזמן הוא ליניארי (קווי) אופקי:

$$a(t) = \text{const.}$$

בגרף שמשמאל:

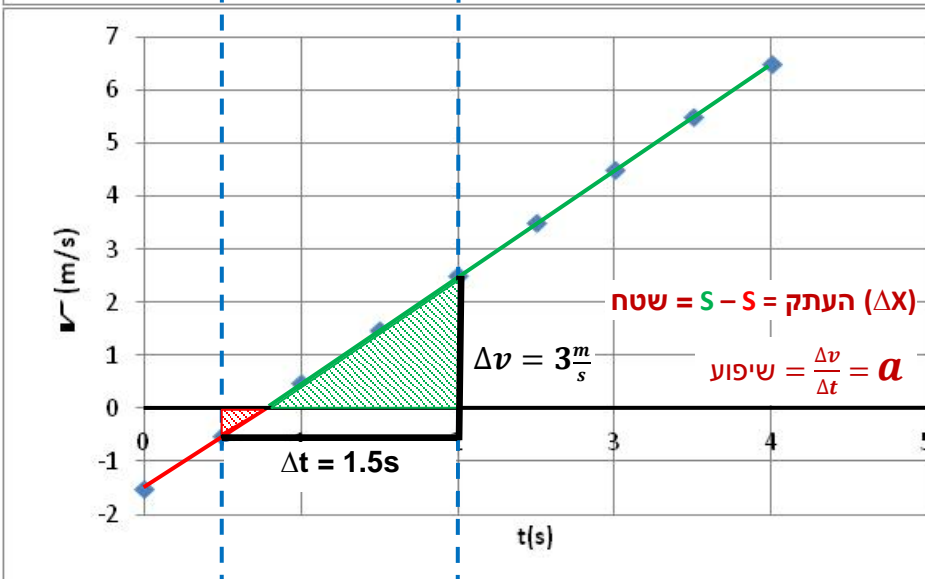
$$a(t) = 2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

נבחן כעת את הקשר שבין המיקום (\vec{x}) המהירות (\vec{v}) והתאוצה (\vec{a}) (שוב, תחת התנאי שתאוצתו קבועה ושהוא נע בקו ישר).

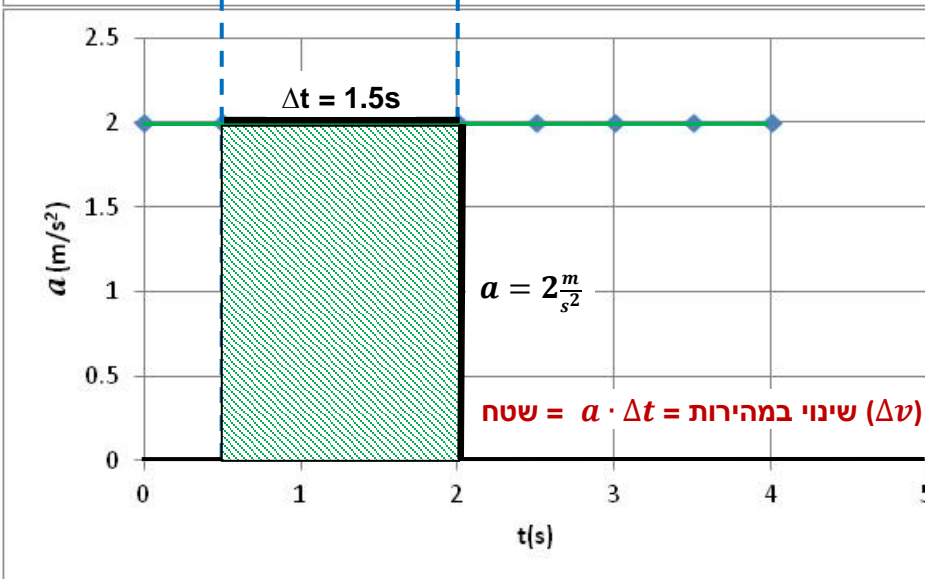


בהתייחס לגרף המהירות שמתחת: לאחר שחיסרנו את שטח המשולש האדום (אשר מייצג העתק שלילי) משטח המשולש הירוק (אשר מייצג העתק חיובי), קיבלנו את העתק הגוף בפרק הזמן $0.5s < t < 2s$, העתק זה חושב להיות $\Delta X = 1.5m$, ומוצג כאן על גרף המיקום.

גרף המהירות מתאר בעצם את השיפוע של גרף המיקום. שיפועה של פרבולה גדל בקצב קבוע, ולכן גרף המהירות הינו ליניארי, ז"א גדל בקצב קבוע.



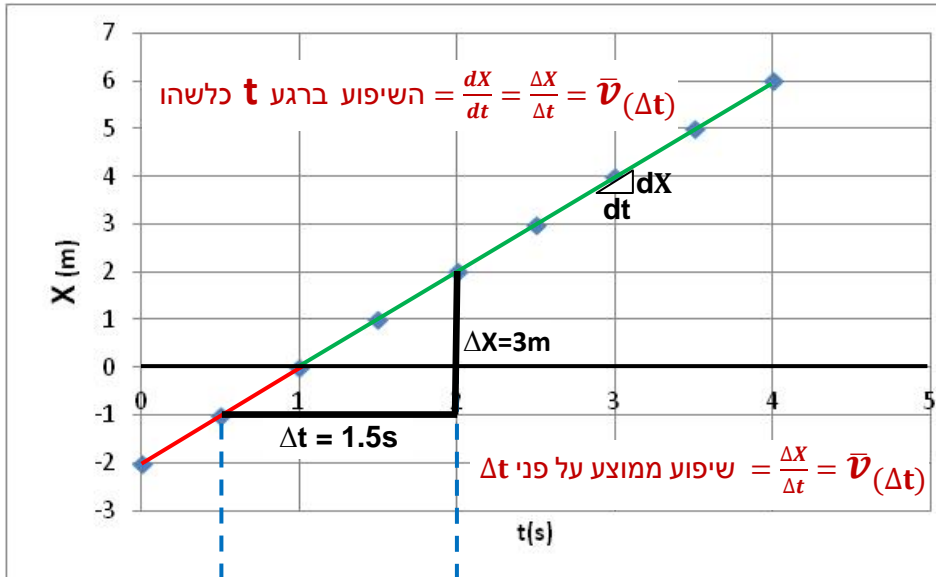
השטח הכלוא בין גרף המהירות לבין ציר הזמן בתחום זמן Δt כלשהו, שווה להעתק הגוף בפרק הזמן הזה. בדוגמה שמשמאל, שטח המשולש האדום הינו $\frac{1}{16}$, ומשמעו העתק של $\frac{1}{16}$ מטר אחורנית. שטח המשולש הירוק הינו $\frac{25}{16}$, ומשמעו העתק של $\frac{25}{16}$ מטר קדימה. ההעתק הכולל ΔX בפרק הזמן $0.5s < t < 2s$ הינו לפיכך $1.5m$ קדימה: שיפוע גרף המהירות שווה לתאוצה: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$



השטח הכלוא בין גרף התאוצה לבין ציר הזמן בתחום זמן Δt כלשהו, שווה לשינוי במהירות של הגוף בפרק הזמן הזה. בדוגמה שמשמאל, שטח המלבן הירוק הינו 3, ומשמעו תוספת מהירות של $3 m/s$ בפרק הזמן $0.5s < t < 2s$.

גרף התאוצה מתאר את שיפוע גרף המהירות. שיפוע גרף המהירות הינו קבוע במקרה דנן, ולכן גרף התאוצה הינו קבוע, ז"א אינו משתנה עם הזמן.

לסיום הפרק הגרפי, נבחן את המקרה הפשוט שבו המהירות קבועה, ז"א התאוצה שווה לאפס.



המהירות קבועה, ולכן הקשר שבין המיקום לזמן הוא ליניארי (קווי):

$$X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

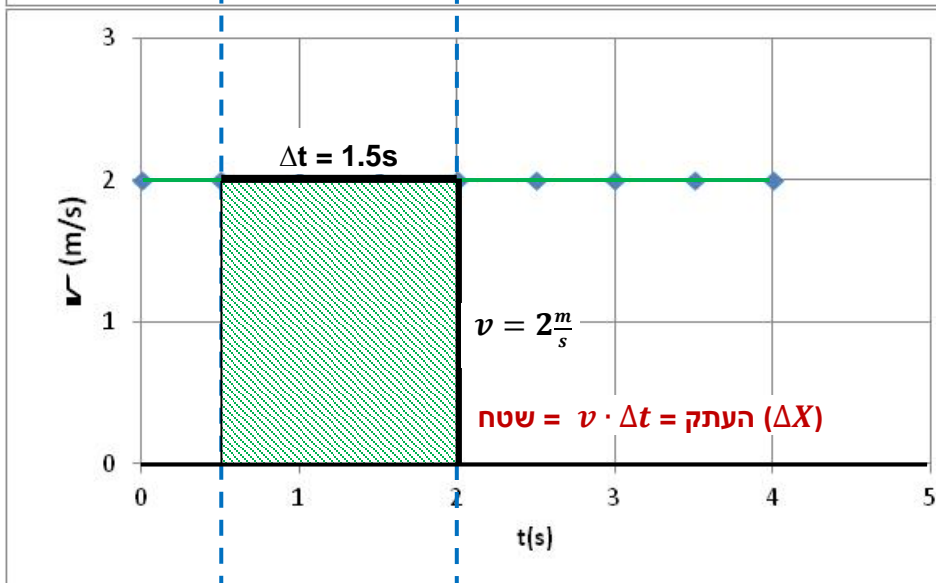
$$X(t) - X_0 = v_0 t$$

ΔX

בגרף שמשמאל:

$$X(t) = X_0 + v_0 t$$

$$X(t) = -2 + 2t \text{ (m)}$$



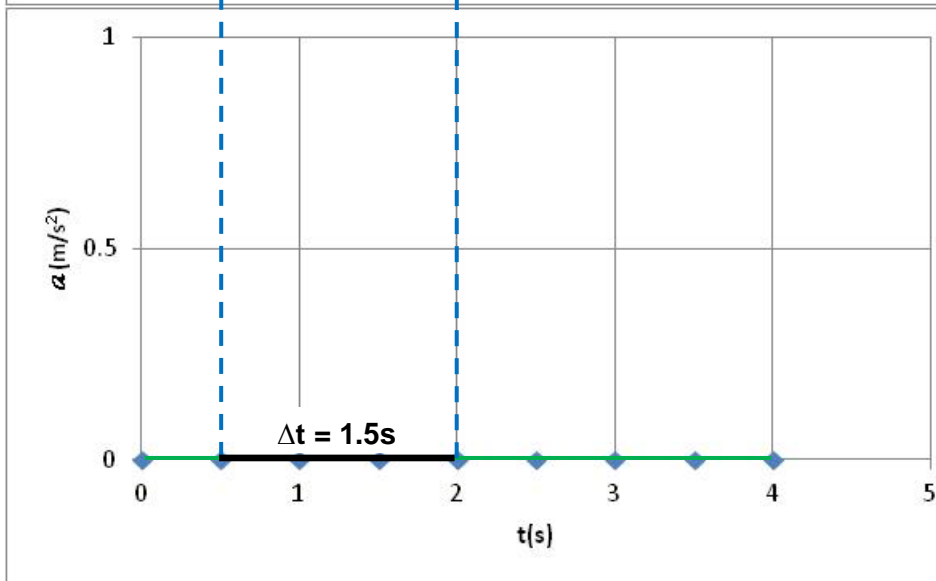
הקשר שבין המהירות לזמן הוא ליניארי (קווי) אופקי:

$$v(t) = \text{const.}$$

בגרף שמשמאל:

$$v(t) = 2 \left(\frac{m}{s} \right)$$

כפי שנאמר קודם, גרף המהירות מתאר את השיפוע של גרף המיקום. במקרה זה ערכה של המהירות קבוע, בהתאמה לשיפוע הקבוע של גרף המיקום.



תאוצת הגוף שווה לאפס:

$$a(t) = 0$$

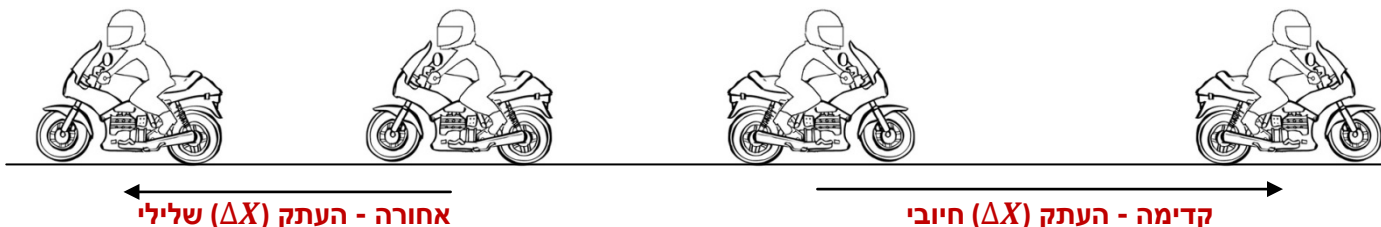
אין שטח תחת גרף התאוצה ולכן אין שינוי במהירותו של הגוף.

כפי שנאמר קודם, גרף התאוצה מתאר את שיפוע גרף המהירות. במקרה זה תאוצת הגוף היא 0, וזהו אכן שיפוע גרף המהירות.

בתנועה על קו ישר ייתכנו שני כיוונים - קדימה ואחורה. בד"כ נקבע "קדימה" להיות הכיוון החיובי, ו"אחורה" השלילי. בתרשימים, מקובל ש"מינה" מייצג "קדימה" ו"שמאלה" מייצג "אחורה", אך אין זה הכרחי.

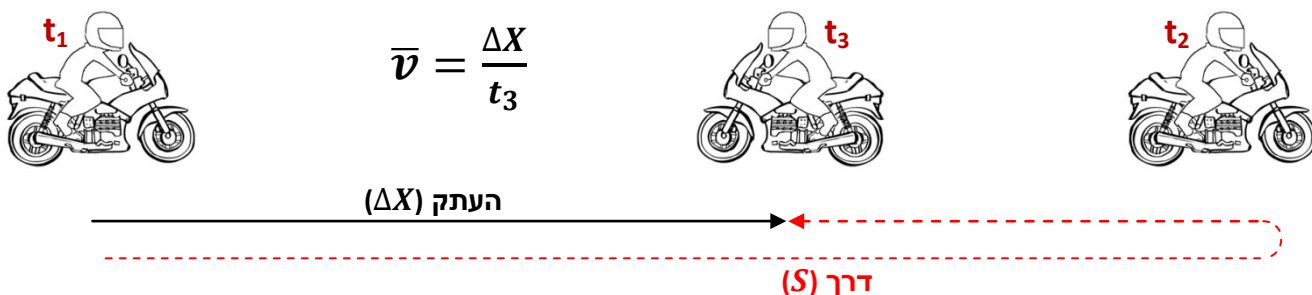
העתק (ΔX)

העתקו של גוף הוא השינוי במיקומו, וכפי שכבר הוסבר בקצרה בתחילת הפרק, זהו ווקטור אשר לו **גודל וכיוון**. לאור האמור בסעיף הקודם, **אם הגוף נע בקו ישר** כיוונו של ההעתק הינו "קדימה" או "אחורה", ז"א "חיובי" או "שלילי".



ההבדל שבין דרך להעתק

דרך (S) היא ה"קילומטראז'" שעבר גוף, בעוד העתק (ΔX) הוא השינוי במיקומו. אם גוף שב למיקומו ההתחלתי לאחר שנע לאורך מסלול כלשהו, העתקו שווה ל-0, אך ברור שהדרך שעבר גדולה מ-0. דוגמה זו ממחישה כי העתקו של גוף קטן בד"כ מהדרך שעבר, ולכל היותר שווה לה כאשר הגוף נע בקו ישר ומתמיד באותו הכיוון.

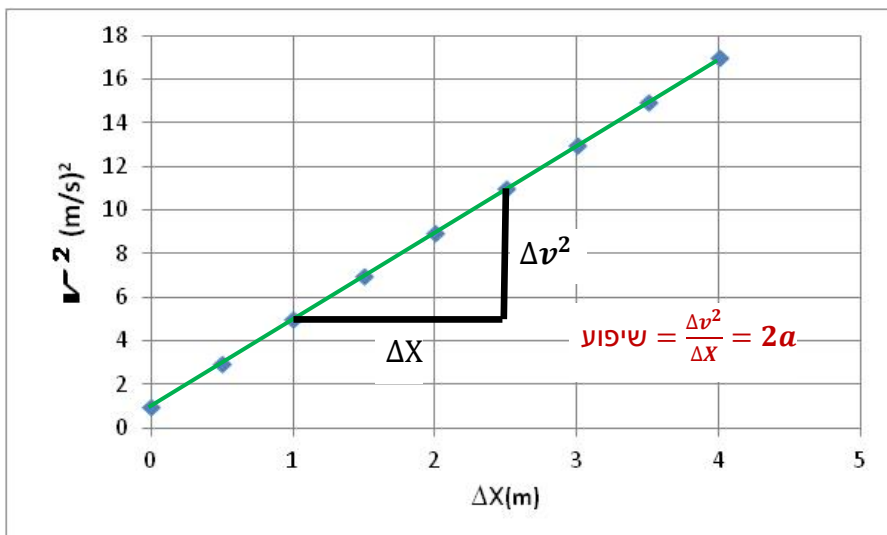


באיור שלעיל, האופנוע נע אומנם בקו ישר אך אינו מתמיד באותו הכיוון, ולכן העתקו קטן מהדרך שעבר.

המהירות הממוצעת (\bar{v}), מתקבלת מחילוק ההעתק במשך התנועה הכולל, כמוראה באיור. נובע מכך שאם העתקו של גוף שווה ל-0, גם מהירותו הממוצעת שווה ל-0, ואם העתקו שלילי, כך גם מהירותו הממוצעת. באשר למהירות הרגעית ולתאוצה, גם כאן, כל עוד הגוף נע בקו ישר, כיוונו יכול להיות רק "קדימה" או "אחורה", ז"א חיובי או שלילי. חשוב להבין זאת ולהקפיד על הסימנים הנכונים כשמציבים בנוסחאות הקינמאטיקה ערכים מספריים של מיקום התחלתי, מהירות התחלתית ותאוצה (דוגמאות בעמוד הבא).

מהירות כתלות בהעתק

לסיום פרק זה נכיר עוד נוסחת קינמאטיקה, הקושרת בין העתקו של גוף לריבוע מהירותו, מבלי לעשות כל שימוש בזמן (t):



הקשר שבין ריבוע המהירות להעתק הוא ליניארי (קווי):

$$v^2_{(\Delta X)} = v_0^2 + 2a \cdot \Delta X$$

בגרף שמשמאל:

$$v^2_{(\Delta X)} = \overset{1}{v_0^2} + \overset{2}{2a} \cdot \Delta X$$

$$v^2_{(\Delta X)} = 1 + 4 \cdot \Delta X$$

גוף הנע בתאוצה קבועה והמתחיל ממהירות 5m/s עובר במשך 10sec מרחק של 100m.
 (א) מהי תאוצתו? (ב) מהי מהירותו לאחר 10sec?

פיתרון: (א) אנו רואים שנתונים מרחק וזמן, ולכן נשתמש בנוסחת ההעתק כתלות בזמן:

$$\Delta X(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$100 = 5 \cdot 10 + \frac{1}{2} a \cdot 10^2 \Rightarrow a = 1 \frac{m}{s^2}$$

(ב) כעת נשתמש בנוסחת המהירות כתלות בזמן:

$$v(t) = v_0 + a t$$

$$v_{(10)} = 5 + 1 \cdot 10 = 15 \frac{m}{s}$$

(א) מהי תאוצתו של גוף המתחיל ממנוחה, וכשמהירותו מגיעה ל- 20m/s העתקו 40m?
 (ב) לאחר כמה זמן תגיע מהירותו ל- 30m/s? (ג) מהו המרחק שיעבור במשך 5 שניות?

פיתרון: (א) זמן אינו מעורב כאן, לכן נשתמש בנוסחת מהירות כתלות בהעתק:

$$v^2(\Delta X) = v_0^2 + 2a \cdot \Delta X$$

$$20^2 = 0 + 2a \cdot 40 \Rightarrow a = 5 \frac{m}{s^2}$$

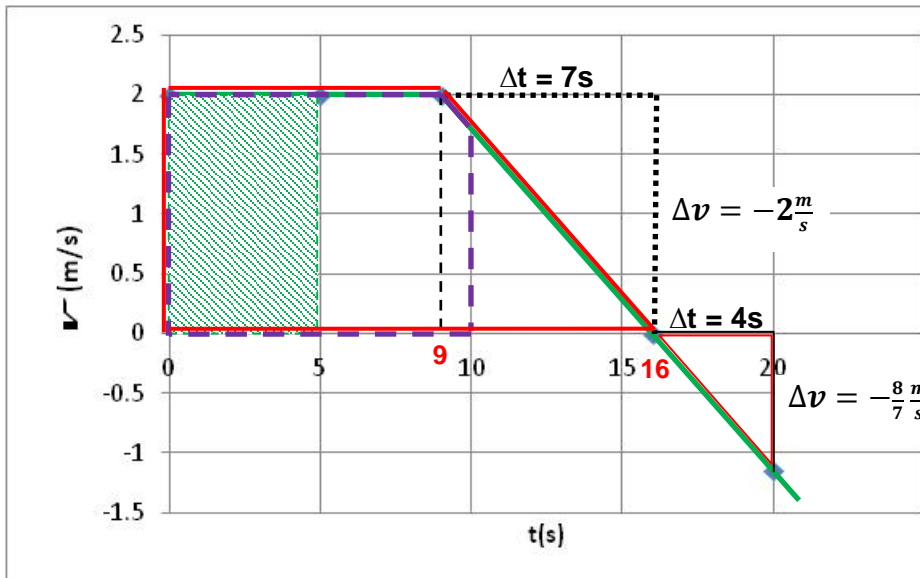
(ב) כאן נשתמש בנוסחת המהירות כתלות בזמן:

$$v(t) = v_0 + a t$$

$$30 = 0 + 5t \Rightarrow t = 6sec$$

(ג) כאן נשתמש בנוסחת ההעתק כתלות בזמן:

$$\Delta X(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \Delta X_{(5)} = 62.5m$$



נתון גרף מהירות-זמן של גוף.
 (א) תאר את תנועת הגוף.
 (ב) מהי תאוצת הגוף לאחר 5sec? לאחר 12sec? לאחר 20sec?
 (ג) מהו העתק הגוף לאחר 5sec? לאחר 10sec? לאחר 20sec?

(א) במהלך 9 השניות הראשונות הגוף נע במהירות קבועה של 2m/s. במהלך 7 השניות הבאות הוא מאט עד לעצירה, ואז מתחיל מיד לנוע אחורנית תוך הגברת מהירותו.

(ב) תאוצת הגוף לאחר 5 שניות היא $a=0$ מפני שהמהירות קבועה (שיפוע אפס).
 תאוצת הגוף לאחר 12 שניות היא $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{2}{7} \frac{m}{s^2}$ מפני שזהו שיפוע גרף המהירות בזמן זה. לאחר 20 שניות כנ"ל.

(ג) העתק הגוף לאחר 5 שניות הוא $\Delta X_{(5)} = v \cdot t = 2 \cdot 5 = 10m$ לחילופין, זהו שטח המלבן המקווקו בירוק.
 העתק הגוף לאחר 10sec הוא שטח המחומש המוקף סגול מקווקו, והמורכב ממלבן ששטחו $\Delta X_{(9)} = v \cdot t = 2 \cdot 9 = 18m$ ומטרפז קטן "עומד" שאורך בסיסו הארוך 2m/s, אורך בסיסו הקצר $2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7} m/s$, וגובהו 1sec. נשתמש בנוסחה לשטח טרפז ונקבל $\Delta X_{(9 < t < 10)} = \frac{2 + \frac{12}{7}}{2} \cdot 1 = \frac{13}{7} m$. שטח המחומש המוקף סגול מקווקו הוא אם כך $\Delta X_{(10)} = 18 + \frac{13}{7} = 19 \frac{6}{7} m$.
 העתק הגוף לאחר 20 שניות הוא שטח הטרפז המוקף אדום מינוס שטח המשולש "השלילי" המוקף אדום:

$$\Delta X_{(20)} = \frac{16+9}{2} \cdot 2 - \frac{4 \cdot \frac{8}{7}}{2} = 22 \frac{5}{7} m$$