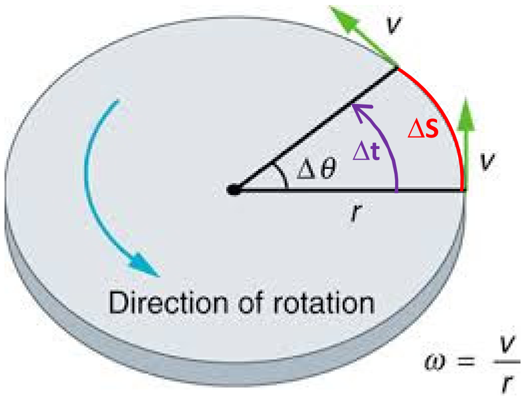
<u>תנועה מעגלית קצובה</u>

מהירות קצובה היא מהירות **שגודלה** קבוע. **כיוונה** של מהירות קצובה יכול להשתנות מרגע לרגע, ואז המהירות **אינה קבועה** - משמע ישנה תאוצה. תאוצה יכולה להתבטא בשינוי גודלה בלבד של המהירות (תנועה מואצת בקו ישר), בשינוי כיוונה בלבד של המהירות (תנועה מעגלית קצובה למשל), או בשינוי גודלה וכיוונה גם יחד (תנועה במעקם תוך בלימה למשל).

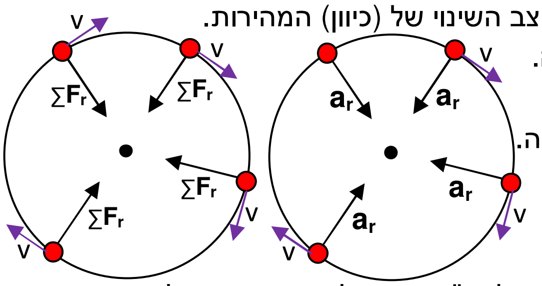
<u>מושגים</u>

<u>$\vec{\omega}$ (אומגה) – מהירות זוויתית</u>, נמדדת ברדיאנים לשנייה (rad/sec): הזווית (ברדיאנים) ש"מבריש" הרדיוס בשנייה אחת.
<u>$\vec{v}$ – מהירות משיקית/קווית</u>, נמדדת במטרים לשנייה (m/sec): הדרך (במטרים) שעוברת נקודה שעל הדסקה בשנייה אחת.

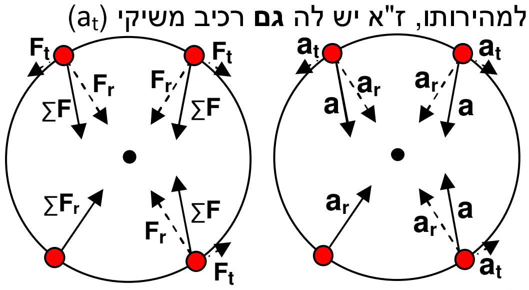


באיור משמאל מוצגת דסקה אשר מסתובבת במהירות זוויתית ω.
Δθ היא הזווית (ברדיאנים) ש"מבריש" הרדיוס r בפרק הזמן Δt (בשניות).
$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, ז"א ω היא הזווית (ברדיאנים) שמבריש הרדיוס **בשנייה אחת.**
אם נכפיל את הזווית Δθ ברדיוס הדסקה r, נקבל את אורך הקשת ΔS שעליה נשענת הזווית, ז"א את הדרך שעברה נקודה שעל היקף הדסקה בפרק הזמן Δt. בשפה מתמטית: **ΔS = Δθ · r**.
נחלק את שני האגפים ב- Δt ונקבל: $\overset{\omega}{\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}\cdot r = \overset{v}{\frac{\Delta S}{\Delta t}}$

חשוב להבין שלכל המולקולות המרכיבות את הדסקה אותה מהירות זוויתית, כולן "מברישות" את אותה הזווית באותו פרק זמן. לא כך הוא לגבי מהירותן הקווית – מולקולה שמרחקה מציר הסיבוב גדול יותר נעה במהירות גדולה יותר: $v = \omega \cdot r$



<u>$\vec{a}_r$ תאוצה צנטריפטאלית</u> (מרכזית), נמדדת במטרים לשנייה בריבוע (m/s^2): קצב השינוי של (כיוון) המהירות.
מהירותו של הכדור האדום שבאיור קצובה (עם השעון נניח), אך כיוונה משתנה.
אם כך יש לו תאוצה, **והיא בהכרח מאונכת למהירות**, שאם לא כן היה לה רכיב משיקי (a_t) אשר היה משנה את גודל המהירות והופכה ללא קצובה.
מסקנה: כאשר מתקיימת תנועה מעגלית קצובה התאוצה היא צנטריפטאלית, ז"א מכוונת כלפי מרכז המעגל.
ומה באשר לכוח השקול?
ובכן, אנו יודעים שכיוונו **תמיד** ככיוון התאוצה, כך שבמקרה זה אף הוא צנטריפטאלי, ז"א מכוון כלפי מרכז המעגל.



ומה אם הכדור נע במעגל במהירות שאינה קצובה? או אז תאוצתו אינה מאונכת למהירותו, ז"א יש לה **גם** רכיב משיקי (a_t) אשר משנה את **גודל** המהירות. אם כיוונו של רכיב זה ככיוון המהירות, הוא מגבירה, ואם כיוונו הפוך לכיוון המהירות, הוא מקטינה.
רכיבה הצנטריפטאלי של התאוצה (a_r), זה אשר מאונך למהירות (ואשר קודם היה היחידי בנמצא), "דואג" (כמו קודם) לקיומה של תנועה מעגלית באמצעות שינוי כיוונה של המהירות.
מסקנה: כאשר מתקיימת תנועה מעגלית שאינה קצובה, התאוצה אינה צנטריפטאלית. יש לה אומנם רכיב צנטריפטאלי, אך גם רכיב משיקי אשר מסיט את כיוונה מהמרכז.
יש לציין כי תנועה מעגלית שאינה קצובה היא "לא טבעית", ז"א יש "לכפות" אותה על הכדור באמצעות קשירתו לקצה חוט או באמצעות הכנסתו לחישוק בעל חריץ פנימי (צמיג של אופניים למשל). ללא "כפיה" שכזו, הכדור ינוע במסלול אליפטי.

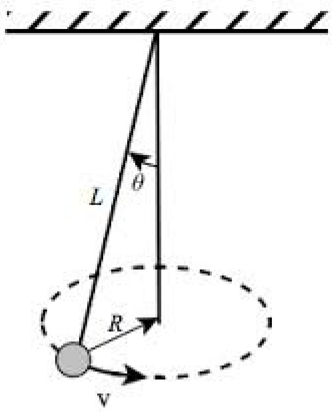
אנו שבים לדון בתנועה מעגלית קצובה. הבנו שכיוון התאוצה (והכוח השקול) הוא כלפי מרכז המעגל, אך מהו גודלה?

ובכן, לא נוכיח זאת כאן, אך גודלה של התאוצה הצנטריפטאלית הוא $a_r = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$

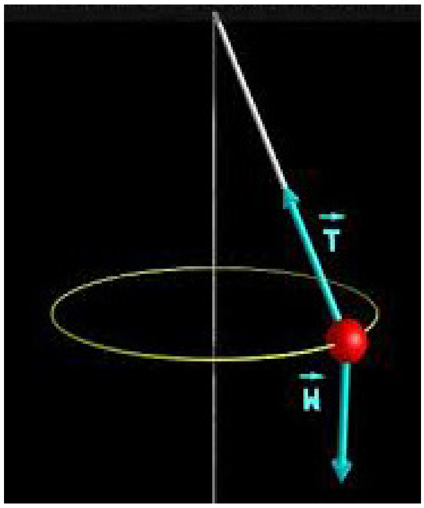
נשלב זאת בחוק השני של ניוטון ונקבל: $\Sigma F_r = ma_r \;=>\; \Sigma F_r = m\omega^2 r = m\cdot\frac{v^2}{r}$

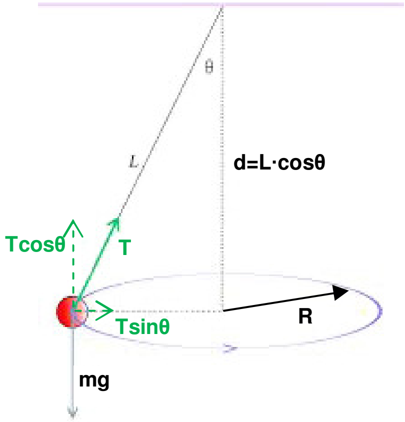
אנו מסיקים כי אם על גוף בעל מסה m אשר נע בקו ישר במהירות v מתחיל לפעול לפתע כוח קבוע F **במאונך לכיוון התנועה** (ומתמיד בכך), הגוף יכנס לתנועה מעגלית קצובה ברדיוס r. הקשר שבין m, v, r, ו- F מתקבל מהנוסחה שלעיל.
ברור שאם v = 0 מלכתחילה, הגוף **לא** יכנס לתנועה מעגלית אלא ינוע בכיוון הכוח הפועל עליו תוך הגברת מהירותו.

המחשה טובה לתנועה מעגלית קצובה היא מטוטלת קונית המסתובבת במהירות קבועה.
חוט שאורכו L מחובר לציר מנוע הבולט מהתקרה. אל קצהו השני של החוט מחובר כדור.
ציר המנוע מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω כלשהי, והחוט פורש בזווית θ מתאימה.
ברור שככל שתגדל מהירות הסיבוב ω, תגדל גם זווית הפרישה θ ועימה רדיוס המעגל R.
הקשר שבין θ ל-R הוא טריגונומטרי: $R = Lsin\theta$



נעבור כעת לשלב הדינאמי של הדיון:
שני כוחות פועלים על הכדור המסתובב: משקלו $\vec{W}$ המכוון מטה ומתיחות החוט המכוונת לאורך החוט. באמצעות החלת החוק השני של ניוטון, ראשית על הציר האנכי ואח"כ על המישור האופקי, נמצא את הקשר שבין מהירות הסיבוב ω, הטנגנס של זווית הפרישה θ, והרדיוס R של המעגל אשר מתווה הכדור בתנועתו הקצובה.





$a_y = 0 \;=>\; \Sigma F_y = 0 \;=>\; T cos\theta = mg$

$a_r \neq 0 \;=>\; \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{F_r} = \mathrm{m}a_r \;=>\; T sin\theta = \mathrm{m}\omega^2\mathrm{R}$

נחלק את שתי המשוואות הנ"ל זו בזו ונקבל:

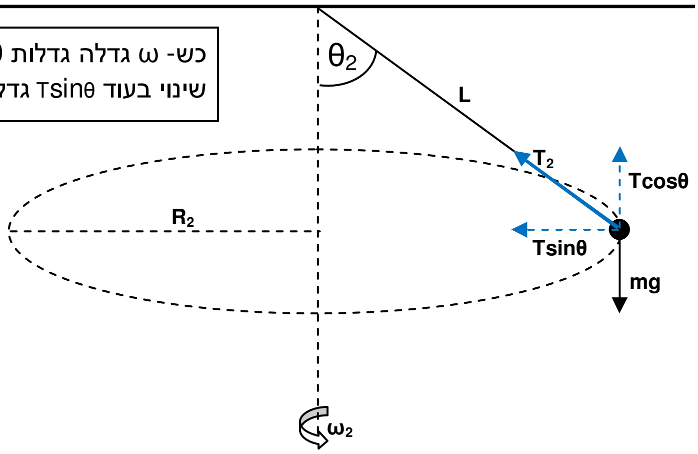
$$\boldsymbol{tg\theta = \frac{\omega^2 R}{g}}$$

נוכל להציב כעת L·sinθ במקום R ולקבל:

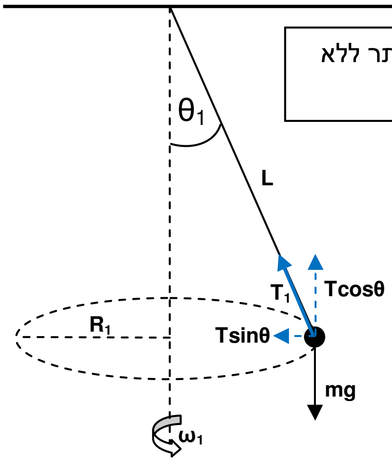
$$\boldsymbol{tg\theta = \frac{\omega^2 L\cdot sin\theta}{g}} \quad => \quad cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L}$$

מהביטוי $cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L}$ ניתן להסיק שככל שגדלה מהירות הסיבוב (ω) קטן $cos\theta$, ז"א גדלה זווית הפרישה θ כפי שצפינו מראש.
עובדה מעניינת נוספת שניתן להסיק מביטוי זה היא **אי** תלותו של d (המרחק שבין הכדור והתקרה) באורך החוט L.
משיקולים טריגונומטריים d=L·cosθ, כך שאנו מקבלים $d = \frac{g}{\omega^2}$, ז"א d אינו תלוי באורך החוט L. מילולית ניתן להסביר זאת כך:
ככל שמשתמשים בחוט ארוך יותר גדלה גם זווית הפרישה θ בהתאמה, כך שמרחק הכדור מהתקרה נותר קבוע.

תפקידו של כוח המתיחות (T) שבחוט הוא להפעיל על הכדור רכיב כוח כלפי מעלה אשר מקזז את משקלו (mg), ורכיב כוח צנטריפטאלי ($\mathrm{m}\omega^2\mathrm{R}$) אשר מאלצו לחוג במעגל. במהירות סיבוב (ω) גדולה יותר נדרשת המתיחות לספק רכיב כוח צנטריפטאלי גדול יותר ועם זאת להותיר את רכיב הכוח כלפי מעלה ללא שינוי, כך שימשיך לקזז את mg כמקודם.
הדבר אפשרי רק באמצעות הגדלתו של וקטור המתיחות (T) **תוך כדי "השכבתו"**, ו"השכבה" שכזו יכולה להיות מושגת רק באמצעות הגדלתה של זווית הפרישה. הגדלה של זווית הפרישה משמעה הגדלת רדיוס הסיבוב (משיקולים טריגונומטריים), אבל הגדלת רדיוס הסיבוב גוררת דרישה **נוספת** לכוח צנטריפטאלי ($\mathrm{m}\omega^2\mathbf{R}$), אשר מחייבת הגדלה **נוספת** של זווית הפרישה.
מעגל קסמים זה של דרישה ← הגדלת פרישה ← הגדלת רדיוס ← הגדלת דרישה← הגדלת פרישה וכן הלאה, נשבר לבסוף הודות לכך שככל שזווית הפרישה גדולה יותר, מתבטאת כל הגדלה נוספת שלה ב"השכבה" דרמטית יותר של וקטור המתיחות מצד אחד, וב"תוספת" קטנה יותר לרדיוס הסיבוב מצד שני. בסופו של דבר מתייצבת זווית הפרישה על אותו ערך מסוים אשר מאפשר למתיחות הן לקזז את משקל הכדור בציר האנכי והן לקיים את תנועתו המעגלית במישור האופקי.
תהא ω גדולה ככל שתהא, θ לעולם לא תגדל לכדי 90° כי אז לא יהיה ל-T רכיב אנכי לקיזוז משקל הכדור.

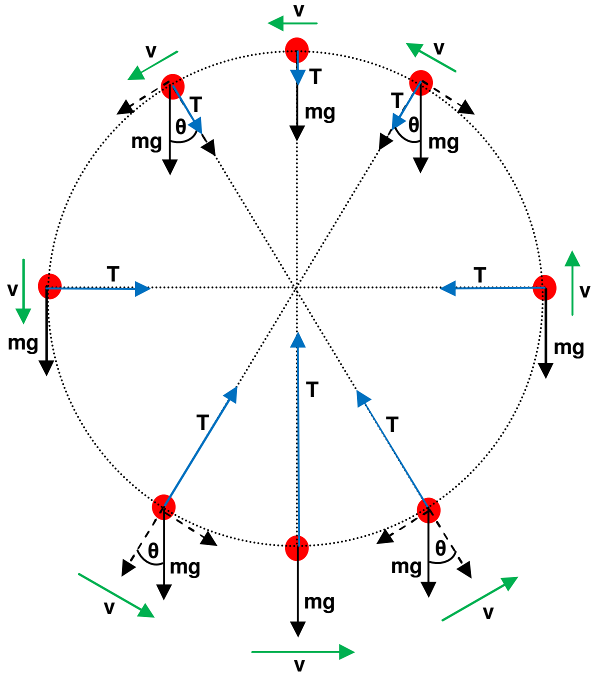


כש- ω גדלה גדלות θ ו-T **יחדיו** כך ש- Tcosθ נותר ללא שינוי בעוד Tsinθ גדל כנדרש.



__תנועה מעגלית שאינה קצובה__

אמרנו קודם שבתנועה מעגלית **שאינה** קצובה הכוח השקול/התאוצה **אינם** מכוונים כלפי מרכז המעגל שמתווה הגוף.
נימקנו זאת בכך שאם **גודל** המהירות משתנה, חייב להיות לכוח השקול רכיב משיקי (F_t) אשר מביא לתאוצה משיקית (a_t).
כדי להמחיש זאת נשוב לכדור מהדוגמה הקודמת, אלא שהפעם נניעהו במסלול מעגלי אנכי במקום אופקי.
נעשה זאת כך: כשהוא תלוי במנוחה נחבוט בו אופקית בחוזקה כך שתוקנה לו מהירות מספקת להשלמת מעגל אנכי.
לאחר שהשלים מעגל אנכי, יגיע שוב לתחתית כשמהירותו זהה לזו שהייתה לו בתחילה ויצא להקפה אנכית נוספת.
(כאן המקום להבהיר כי למטוטלת הקונית שבדוגמה הקודמת לא נדרש מנוע. די בכך שהחוט הקשור לתקרה יוטה הצידה, ולכדור תוקנה מהירות אופקית מאונכת לחוט. הדבר יגרום לכדור לחוג אופקית במהירות קצובה, לנצח).

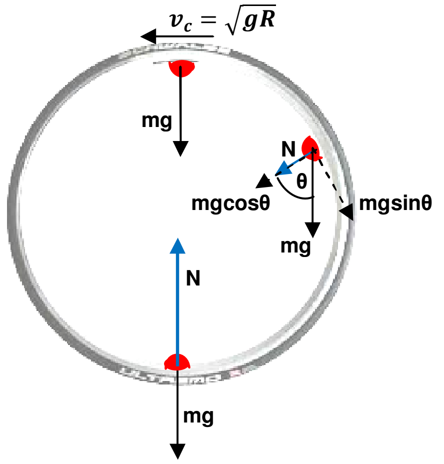


באיור משמאל מתואר כדור קשור לחוט אשר חג אנכית, נגד השעון נאמר.
למטה מהירותו מרבית, והיא פוחתת בהדרגה עד שלמעלה היא מזערית.
אז היא גוברת בהדרגה עד שלמטה היא שוב מרבית.
ע"פ $\Sigma F_r = m\frac{v^2}{R}$ נדרש ΣF_r מרבי כאשר המהירות מרבית, ז"א למטה,
ו- ΣF_r מזערי כאשר המהירות מזערית, ז"א למעלה.
למטה $\Sigma F_r = T - mg$, ולכן נדרשת שם מתיחות גדולה מאוד.
למעלה $\Sigma F_r = T + mg$, ולכן נדרשת שם מתיחות קטנה מאוד.
בצדדים $\Sigma F_r = T$ וכמו כן המהירות בינונית, כך שהמתיחות בינונית.
הכוח המשיקי שם הוא mg כולו, ולכן התאוצה המשיקית שם היא g.
מימין מדובר בתאוטה מפני שהכוח המשיקי פועל נגד כיוון התנועה,
ומשמאל מדובר בתאוצה מפני שהכוח המשיקי פועל בכיוון התנועה.
קרוב לתחתית המהירות גבוהה ו- $\Sigma F_r = T - mg\cos\theta$.
הכוח המשיקי שם הוא $mg\sin\theta$ ולכן התאוצה המשיקית שם היא $g\sin\theta$.
שוב, מימין מדובר בתאוטה ומשמאל מדובר בתאוצה.
קרוב לפסגה המהירות נמוכה ו- $\Sigma F_r = T + mg\cos\theta$.
הכוח/תאוצה המשיקיים הם כפי שהיו קרוב לתחתית.

תפקידה של המתיחות (T) הוא לאזן את המשוואה $\Sigma F_r = m\frac{v^2}{R}$ כך שאגף שמאל שלה יתאים למהירות בכל רגע ורגע.
כאשר הכוח $mg\cos\theta$ מכוון למרכז (מחצית המעגל העליונה) **אך אינו גדול דיו**, T מצטרף אליו ומתגבר אותו.
כאשר הכוח $mg\cos\theta$ מכוון החוצה (מחצית המעגל התחתונה), T מתנגד לו בחוזקה, מקזזו, ומשאיר "עודף" מתאים.
ומה אם במחצית המעגל העליונה הכוח $mg\cos\theta$ גדול דיו ואינו נזקק לתגבור? או אז *T=0*.
ומה אם במחצית המעגל העליונה הכוח $mg\cos\theta$ גדול מדי? או אז T צריך להיות מכוון החוצה, **ואין זה אפשרי**!
המשוואה $\Sigma F_r = m\frac{v^2}{R}$ תאלץ אז להתאזן ע"י הקטנת רדיוס הסיבוב R. הכדור "יחפש" רדיוס סיבוב "חדש" אשר יאזן אותה.

נשאלת השאלה מהי מהירותו המזערית של הכדור **בחולפו למעלה** אשר עדיין תאפשר לו להישאר ברדיוס הסיבוב המקורי, ז"א מהי המהירות שעבורה mg הוא הכוח הצנטריפטאלי הנדרש? $\Sigma F_r = m\frac{v^2}{R} \;=>\; mg = m\frac{v^2}{R} \;=>\; g = \frac{v^2}{R} \;=>\; v = \sqrt{gR}$
מהירות זו מכונה "המהירות הקריטית": $v_c = \sqrt{gR}$. אם מהירות הכדור **בחולפו למעלה** נמוכה ממנה, הוא "יקטין רדיוס".

בניתוח לעיל הכדור קשור לחוט. במקום זאת אפשר להניחו בתוך צמיג של אופניים (כשהצמיג מוחזק אנכית ומשומן מבפנים למניעת חיכוך), ולהקנות לו מהירות גבוהה באמצעות חבטה. הניתוח הפיזיקאלי יהיה זהה לזה שלעיל, מלבד המתיחות (T) אשר תוחלף בכוח הנורמאלי (N) שהצמיג מפעיל על הכדור. **דחיפה צנטריפטאלית במקום משיכה צנטריפטאלית, היינו הך**!



באיור משמאל הכדור חג אנכית בתוך צמיג במהירות לא קצובה.
למטה מהירותו מרבית ולמעלה מהירותו מזערית.
אם מהירותו למעלה גדולה מ- $\sqrt{gR}$, נדרש כוח צנטריפטאלי גדול מ- mg ואז N מגבירו.
אם מהירותו למעלה שווה ל- $\sqrt{gR}$, הכוח הצנטריפטאלי הנדרש הינו mg ואז N מתאפס.
אם מהירותו למעלה קטנה מ- $\sqrt{gR}$, הכוח הצנטריפטאלי הנדרש קטן מ- mg ואז הכדור נאלץ להתנתק מהצמיג ע"מ להקטין רדיוס.