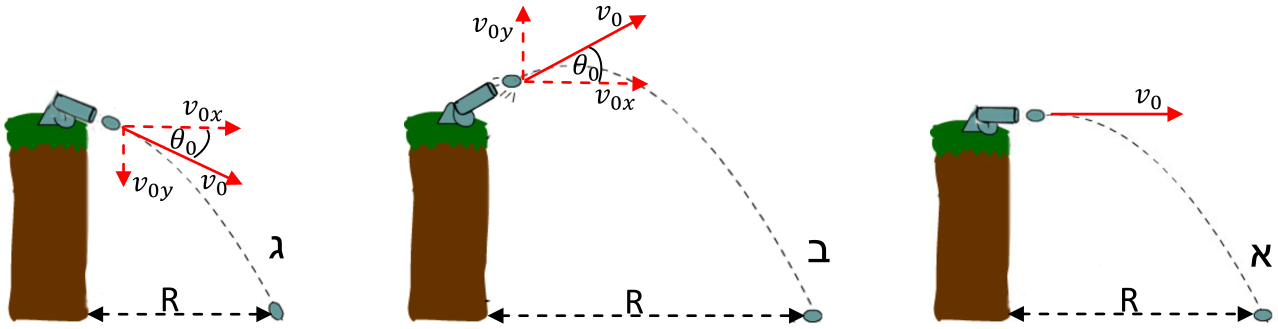
<u>נפילה חופשית במסלול בליסטי (פרבולי)</u>

בשיעור הקודם אמרנו, כי גוף אשר כוח הכובד הוא הכוח היחידי הפועל עליו, נמצא בנפילה חופשית.
הגבלנו אז את הדיון **לנפילה חופשית בקו ישר**, ז"א למקרה שבו גוף משוחרר ממנוחה או נזרק אנכית בשדה כבידה.
בשיעור זה נרחיב את הדיון **לנפילה חופשית במסלול בליסטי (פרבולי)**, ז"א למקרה שבו גוף נזרק בשדה כבידה בכיוון **שאינו אנכי**. זריקה שכזו נקראת **זריקה משופעת**, ואם השיפוע הוא 0, היא נקראת **זריקה אופקית**.
להזכירכם, תאוצתו של גוף הנמצא בנפילה חופשית היא $\vec{g}$, וכיוונה **תמיד** כלפי מטה. בקרבת כדור הארץ $g=10m/s^2$.
נדון אם כן בשלושת המקרים הבאים (תחת התנאי שהם מתרחשים בקרבת כדור הארץ, כפי שהיה בשיעור הקודם):
א) זריקה אופקית (חצי פרבולה). **ב)** זריקה בשיפוע חיובי (יותר מחצי פרבולה). **ג)** זריקה בשיפוע שלילי (פחות מחצי פרבולה).



$v_{0y}=o$, ז"א מבחינת ציר Y הגוף משוחרר ממנוחה. $v_{0x}=v_0$ בכיוון אופקי.	$v_{0y}=v_0\cdot sin\theta_0$ בכיוון מעלה, ז"א **מבחינת ציר Y** הגוף נזרק אנכית כלפי מעלה. $v_{0x}=v_0\cdot cos\theta_0$ בכיוון אופקי.	$v_{0y}=v_0\cdot sin\theta_0$ בכיוון מטה, ז"א **מבחינת ציר Y** הגוף נזרק אנכית כלפי מטה. $v_{0x}=v_0\cdot cos\theta_0$ בכיוון אופקי.

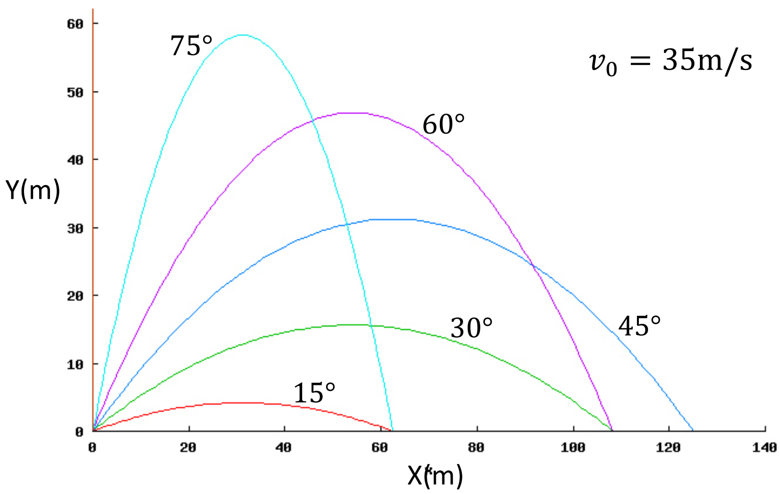
אם "אין אוויר" אין חיכוך, ואז התאוצה היא 0 בכיוון האופקי ו- g (כלפי מטה) בכיוון האנכי. אנו נעסוק **בעיקר** במצב זה.
θ_0 היא זווית הכינון, וככל שתגדל, יגדל רכיבה האנכי (v_{0y}) של מהירות הזריקה ויקטן רכיבה האופקי (v_{0x}).
ניתן לומר כי רכיבה האנכי של מהירות הזריקה קוצב את משך מעופו של הגוף, בעוד רכיבה האופקי קוצב את העתקו האופקי **פר שנייה**. ככל שתגדל θ_0 יתארך משך המעוף (כי v_{0y} גדול יותר) כך שלגוף יהיה זמן רב יותר להתקדם אופקית, אך הוא יעשה זאת במהירות (אופקית) נמוכה יותר. מהי אם כן זווית הכינון אשר בעטייה יושג טווח (Range) מרבי? ברור שעליה להיות חיובית (מעל לאופק), ורוב האנשים יאמרו 45 מעלות, מתוך תחושה שכך מושגת פשרה אופטימאלית בין משך מעוף ארוך דיו לבין מהירות אופקית גבוהה דייה. תשובה זו נכונה כאשר נקודות הזריקה והנחיתה נמצאות באותו הגובה, אך בכל מקרה אחר (כמו זה שבאיור ב' למשל), יש לערוך חישוב ספציפי שלוקח בחשבון גם את הפרש הגובה שבין נקודות הזריקה והנחיתה.

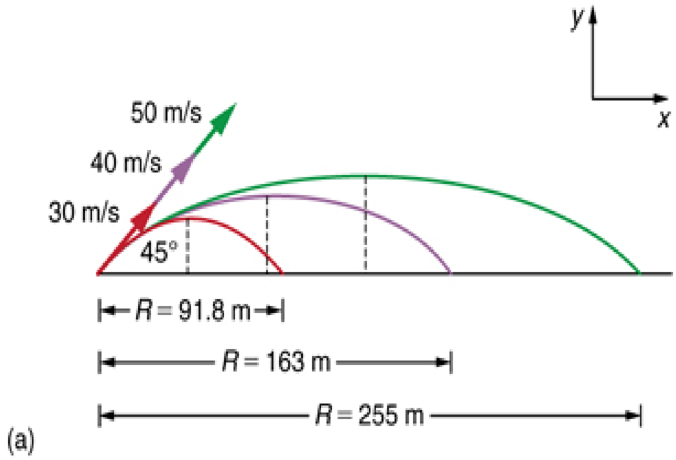
<u>כינון ישיר (שטוח מסלול) וכינון עקיף (תלול מסלול)</u>

בסעיף זה נעסוק במצב שבו נקודות הזריקה והנחיתה נמצאות באותו הגובה (פרבולה סימטרית). לאור שנאמר קודם, סביר שתהיינה שתי זוויות כינון שונות שבהן יושג אותו הטווח, האחת גדולה מ-45 מעלות (משך מעוף ארוך אך מהירות אופקית נמוכה) והשנייה קטנה מ-45 מעלות (משך מעוף קצר אך מהירות אופקית גבוהה). אכן, כפי שיודע כל תותחן, אם נוסיף או נפחית מ-45 מעלות את **אותה הזווית**, יתקבל אותו טווח ירי. במילים אחרות, בזוויות הכינון α ו- $(90°-\alpha)$ מתקבל טווח זהה.

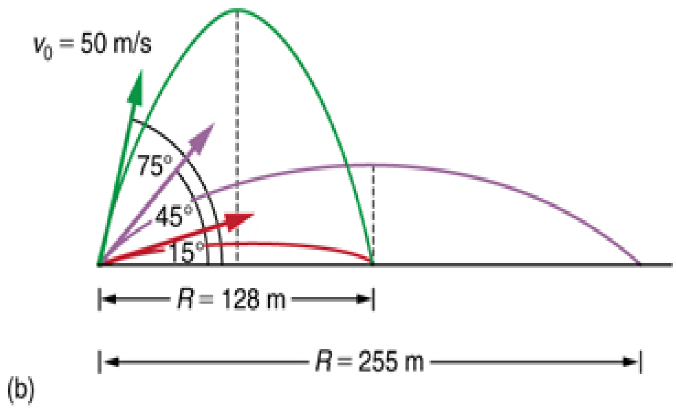
טווח מרבי מושג בזווית כינון בת $45°$.
לכל טווח אחר מתאימות שתי זוויות כינון, אחת קטנה מ-$45°$ ושנייה גדולה מ-$45°$, המשלימות יחדיו ל-$90°$.
כשנתונות מהירות הזריקה (v_0) וזווית הכינון (θ_0), ניתן לחשב את הטווח (R) ישירות מהנוסחה:

$$R=\frac{{v_0}^2\cdot sin2\alpha}{g}$$





איור (a) שמשמאל נועד להמחיש את השפעתה של מהירות הזריקה על הטווח המתקבל, ולכן מציגו כאשר זווית הכינון קבועה (שרירותית נבחרה כאן להיות 45°) עבור 3 מהירויות זריקה שונות: 30m/s, 40m/s ו- 50m/s. ניתן להבחין בקשר הריבועי שבין מהירות הזריקה והטווח, היינו, הכפלת מהירות הזריקה מרבעת את הטווח.



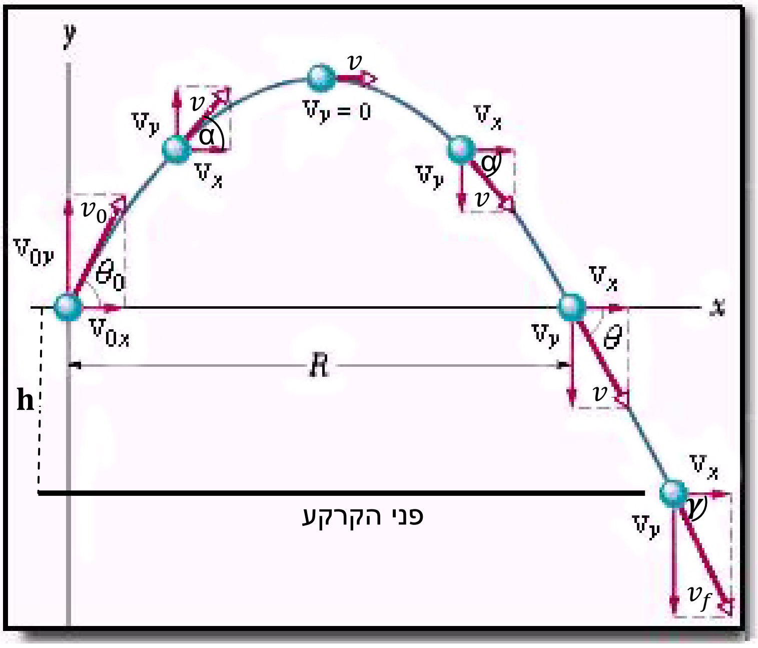
איור (b) שמשמאל נועד להמחיש את השפעתה של זווית הכינון על הטווח המתקבל, ולכן מציגו כאשר מהירות הזריקה קבועה (50m/s) עבור 3 זוויות כינון שונות: 15°, 45° ו 75°. שימו לב לכך שהטווח המתקבל בזוויות הכינון 15° ו 75° שווה למחצית הטווח המתקבל בזווית הכינון 45° (שהינו הטווח המרבי שניתן להשיג).

ניתוח המעוף הבליסטי

כפי שנאמר קודם, אם "אין אוויר" אין חיכוך, ואז התאוצה היא 0 בכיוון האופקי ו- g (כלפי מטה) בכיוון האנכי.

במצב זה **רכיבה האופקי** של המהירות הינו קבוע, ז"א אינו משתנה עם הזמן: $v_x = v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta_0$

רכיבה האנכי של המהירות משתנה עם הזמן ע"פ מה שלמדנו בשיעור הקודם: $v_{y(t)} = v_{0y} + gt = v_0 \cdot sin\theta_0 + gt$



באיור שמשמאל קל לראות כי רכיבה האופקי (v_x) של המהירות אינו משתנה במהלך המעוף, בעוד זה האנכי (v_y) משתנה ועוד איך: הולך וקטן כלפי מעלה, מתאפס בשיא הגובה, ואז הולך וגדל כלפי מטה. הסימטריה שבתנועה האנכית (נדונה בשיעור הקודם) משולבת כאן עם תנועה אופקית במהירות קבועה, ויוצרת לכן סימטריה "יחסית לאופק": אם כיוון המהירות בנקודה כלשהי על המסלול הינו α מעלות מעל לאופק, הרי שבנקודה שנייה הנמצאת **באותו הגובה** יהיה כיוון המהירות α מעלות מתחת לאופק.

בזכות תלותו **הליניארית** של v_y בזמן והיות v_x **קבוע** בזמן, מתקבל מסלול מעוף **פרבולי** ולא סתם קשתי כלשהו.

בשני השיעורים הקודמים עסקנו בתנועה על קו ישר, ולכן יכולנו לתאר את המהירות כ"חיובית" או כ"שלילית" בהתאם לכיוונה. נוכל להמשיך ולעשות זאת כאן עם **רכיבי** המהירות v_x ו-v_y, מפני שכ"א מהם כשלעצמו מתאר תנועה על קו ישר, אופקי ואנכי. את כיוון המהירות עצמה (v), על כל פנים, נתאר באמצעות "זווית ביחס לאופק", למשל, כיוונה של המהירות ההתחלתית (v_0) באיור היא θ_0 מעלות מעל לאופק ימינה", ואילו כיוונה של מהירות הנחיתה (v_f) היא "$\boldsymbol{\gamma}$ מעלות מתחת לאופק ימינה".

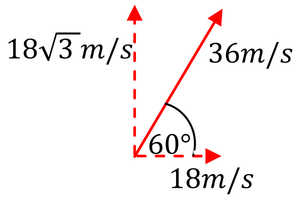
נציג כעת תרגיל המתאים לאיור שלעיל (ולמקרה ב' שבתחילת שיעור זה):

אבן נזרקת בזווית $60°$ מעל לאופק ימינה, במהירות $36m/s$, מגג בניין שגובהו 12m.

ערכי התחלה: h=12m $\quad v_0 = 36m/s \quad \theta_0 = 60°$

א) מהם ערכי רכיביה של המהירות ההתחלתית (מהירות הזריקה)?

$v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta_0 = 36 \cdot cos60° = 18m/s \ right \qquad v_{0y} = v_0 \cdot sin\theta_0 = 36 \cdot sin60° = 18\sqrt{3}\, m/s \ up$



ב) מהי מהירות האבן כשהיא בשיא הגובה?

בשיא הגובה כיוון המהירות אופקי ואז היא שווה בעצם ל- v_x (אשר אינו משתנה במשך המעוף):

$v_{top} = v_x = v_{0x} = 18m/s \ right$

ג) תוך כמה זמן מגיעה האבן לשיא הגובה?

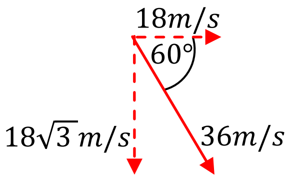
בשיא הגובה v_y מתאפס: $\quad v_{y(t)} = v_{0y} + gt \quad => \quad 0 = 18\sqrt{3} - 10t_{top} \quad => \quad t_{top} = 1.8\sqrt{3}\ sec$

ד) תוך כמה זמן נמצאת האבן שנית בגובה גג הבניין שממנו נזרקה?

מטעמי סימטריה, כפליים הזמן שלקח לה להגיע לשיא הגובה: $\quad t_{back} = 2t_{top} = 3.6\sqrt{3}\ sec$

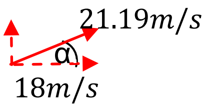
ה) מהי מהירותה של האבן באותו רגע?

מטעמי סימטריה, $36m/s$ בזווית $60°$ מתחת לאופק ימינה.



ו) מהי מהירותה של האבן בחלוף 2 שניות מרגע זריקתה?

$v_{y(t)} = v_{0y} + gt \quad => \quad v_{y(2)} = 18\sqrt{3} - 10 \cdot 2 \quad => \quad v_{y(2)} = 11.18m/s$



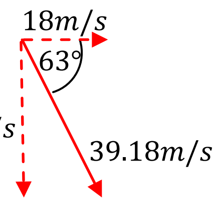
$v_{(t)}^2 = v_{x(t)}^2 + v_{y(t)}^2 \quad => \quad v_{(2)}^2 = v_{x(2)}^2 + v_{y(2)}^2 \quad => \quad v_{(2)}^2 = 18^2 + 11.18^2 \quad => \quad v_{(2)} = 21.19m/s$

$tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad => \quad tan\alpha = \frac{11.18}{18} \quad => \quad \alpha = \ 31.84°\ above\ horizon\ to\ the\ right$

ז) מהי מהירות פגיעתה של האבן בקרקע?

יש לשים לב לכך ש $\Delta y = -h$ מאחר
והנקודה הנדונה נמוכה מהנקודה ההתחלתית

$v_y{}^2 = v_{0y}{}^2 + 2g \cdot \Delta y \ => \ v_{yf}{}^2 = (18\sqrt{3})^2 - 20 \cdot (-12) = 1212 \ => \ v_{yf} = 34.8m/s$



$v_f^2 = v_{xf}^2 + v_{yf}^2 \quad => \quad v_f^2 = 18^2 + 34.8^2 = 1535 \quad => \quad v_f = 39.18m/s$

$tan\gamma = \frac{v_y}{v_x} \quad => \quad tan\gamma = \frac{34.8}{18} \quad => \quad \gamma = \ 62.65°\ below\ horizon\ to\ the\ right$