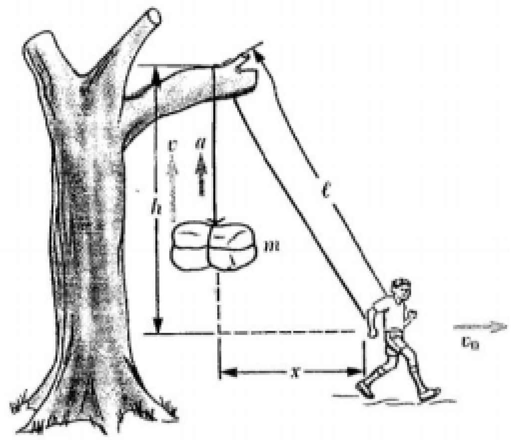
In order to protect his food from hungry bears, a boy scout raises his food pack, mass m, with a rope that is thrown over a tree limb of height h above his hands. He walks away from the vertical rope with constant velocity v_0 holding the free end of the rope in his hands (see Figure). (a) Show that the velocity v of the food pack is $x(x^2+h^2)^{-1/2}v_0$ where x is the distance he has walked away from the vertical rope. (b) Show that the acceleration a of the food pack is $h^2(x^2+h^2)^{-3/2}v_0^2$. (c) What values do the acceleration and velocity v have shortly after the boy scout leaves the vertical rope? (d) What values do the velocity and acceleration approach as the distance x continues to increase?



המהירות v שבה עולה החבילה שווה לקצב שבו מתארך קטע החבל l שבין הענף לילד, ז"א $v = \frac{dl}{dt}$.

כמו כן, המהירות v_0 בה נע הילד ימינה שווה לקצב שבו מתארך x, ז"א $v_0 = \frac{dx}{dt}$.

בגזירות שלהלן נעשה שימוש בכלל השרשרת.

a)

$$l^2 = x^2 + h^2 \quad => \quad 2l\frac{dl}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad => \quad lv = xv_0 \quad => \quad v = \frac{v_0 x}{l} = \frac{v_0 x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

b)

גזירת מהירות החבילה v לפי זמן מניבה את תאוצתה a

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{v_0 x}{\sqrt{x^2+h^2}}\right)\cdot v_0 = \frac{v_0\sqrt{x^2+h^2} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+h^2}}v_0 x}{x^2+h^2}\cdot v_0 =$$

$$= \frac{v_0(x^2+h^2) - v_0 x^2}{(x^2+h^2)\sqrt{x^2+h^2}}\cdot v_0 = \frac{v_0 h^2}{(x^2+h^2)^{3/2}}\cdot v_0 = \frac{h^2 {v_0}^2}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

c)

מייד לאחר עוזבו את החבל, מהירות החבילה נותרת כשהייתה רגע קודם לכן. מהירות זקוקה לפרק זמן כדי להשתנות.

תאוצת החבילה לעומת זאת משתנה בין רגע וכעת היא g - תאוצת הנפילה החופשית (בהזנחת משקל החבל והחיכוך בענף).

d)

כשהמרחק x גדל, שואפת מהירות החבילה v להשתוות למהירות הילד v_0, ותאוצתה שואפת להשתוות לתאוצת הילד – אפס.