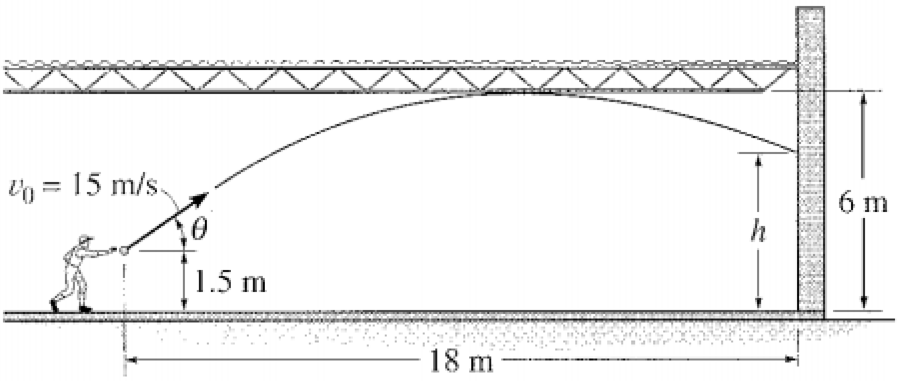
שאלה 1

באיור לשאלה זו מתואר אדם העומד במרחק אופקי של 18m מקיר וזורק כדור מגובה 1.5m מהרצפה במהירות התחלתית $v_0 = 15\frac{m}{sec}$, בזווית θ ביחס לאופק.



א. באיזו זווית θ על האדם לזרוק את הכדור כדי שהוא יפגע בקיר בגובה המקסימלי h, מבלי שיפגע בתקרה.
גובה התקרה הוא 6m כמתואר באיור.

ב. חשב את הגובה h.

ג. 1. חשב את גודלה של המהירות שבה יפגע הכדור בקיר.
2. חשב את זווית הפגיעה של הכדור ביחס לאנך לקיר.

ד. לאחר הפגיעה בקיר, ניתז הכדור מהקיר במהירות שגודלה זהה למהירות הפגיעה.
הזווית מתחת לאופק שבה ניתז הכדור מהקיר זהה לזווית הפגיעה בקיר.
חשב את המרחק האופקי מן הקיר שבו יפגע הכדור ברצפה.

פיתרון א':

בעצם אנו מחפשים את θ שתביא את הכדור ל"שפשוף קל" של התקרה, כי θ קטנה יותר משמעה h קטן יותר.

$$\Delta y = 4.5m \quad , \quad v_0 = 15\frac{m}{s} \quad , \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta \quad , \quad a = -g$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y \quad => \quad 0 = v_0^2 sin^2\theta - 2g\Delta y \quad => \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2g\Delta y}}{v_0} = \frac{\sqrt{90}}{15} \quad => \quad \theta = 39.23°$$

רק לשם סקרנות, נחשב גם באיזה מרחק אופקי מתרחש "שפשוף" התקרה:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{225 \sin 78.46}{10} = 22\, m \quad => \quad \Delta x_{peak} = 11m$$

פיתרון ב': חישוב h המרבי שניתן להשיג

$$\Delta y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}\frac{\Delta x}{v_x} - \frac{1}{2}g\left(\frac{\Delta x}{v_x}\right)^2 = \frac{v_{0y}}{v_x}\Delta x - \frac{g}{2v_x^2}\Delta x^2 = \tan\theta \cdot \Delta x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\Delta x^2$$

$$y = y_0 + \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

פיתחנו כאן את פונקצית המסלול הבליסטי, y כתלות ב- x (פרבולה "בוכה"). הנחנו ש- $x_0 = 0$ כך ש- $\Delta x = x$.

הפרמטרים במקרה הנדון הם:

$$y_0 = 1.5m \quad , \quad v_0 = 15\frac{m}{s} \quad , \quad \theta = 39.23°$$

ולכן המסלול הבליסטי שלנו הינו:

$$y_{(x)} = 1.5 + tan\,39.23° \cdot x - \frac{10}{2 \cdot 15^2 cos^2 39.23°} \cdot x^2$$

אנו רוצים לדעת מהו y כאשר $x = 18m$

$$h_{max} = y_{(18)} = 1.5 + \tan 39.23° \cdot 18 - \frac{10}{2 \cdot 15^2 \cos^2 39.23°} \cdot 18^2 = 4.2m$$

זהו h המרבי שניתן להשיג במרחק $18m$ תחת מגבלת התקרה - התשובה לסעיף ב'.

ללא מגבלת התקרה, הפיתרון לסעיפים א' ו- ב' הינו כדלקמן:

גזירת פונקצית המסלול הבליסטי הכללי לפי θ והשוואתו לאפס כדי למצוא עבור איזו זווית θ מתקבל y מקסימאלי :

$$y = y_0 + x \cdot \tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{x}{\cos^2\theta} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta} = \frac{x}{\cos^2\theta} - \frac{gx^2}{v_0^2} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}$$

$$\frac{x}{\cos^2\theta} - \frac{gx^2}{v_0^2} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} = 0 \quad => \quad \frac{x}{\cos^2\theta} = \frac{gx^2}{v_0^2} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} \quad => \quad 1 = \frac{gx}{v_0^2} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad =>$$

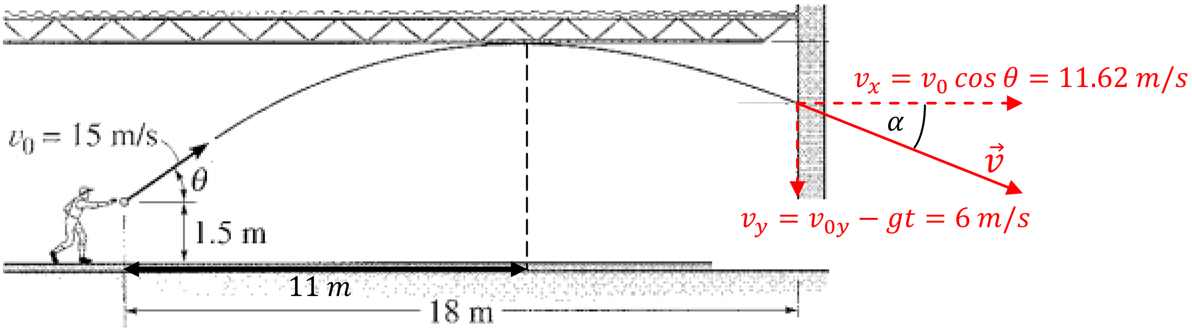
$$=> \quad \tan\theta = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{15^2}{10 \cdot 18} \quad => \quad \theta = 51.34°$$

הצבת הזווית שהתקבלה בפונקצית המסלול הבליסטי שלנו לקבלת y המקסימאלי:

$$h_{max} = y_{(18)} = 1.5 + 18 \cdot \tan 51.34° - \frac{10 \cdot 18^2}{2 \cdot 15^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 51.34°} = 5.55m$$

ובכן, ללא מגבלת התקרה גובה הפגיעה המרבי בקיר הינו $5.55m$, ועם מגבלת התקרה, גובה זה הינו $4.2m$.

פיתרון ג': מהירות הפגיעה בקיר



$v = ?$, $\Delta x = 18m$, $v_0 = 15\frac{m}{s}$, $v_x = v_0 \cos\theta$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta$, $\theta = 39.23°$

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta} = \frac{18}{15\cos 39.23°} = 1.55\ sec$$

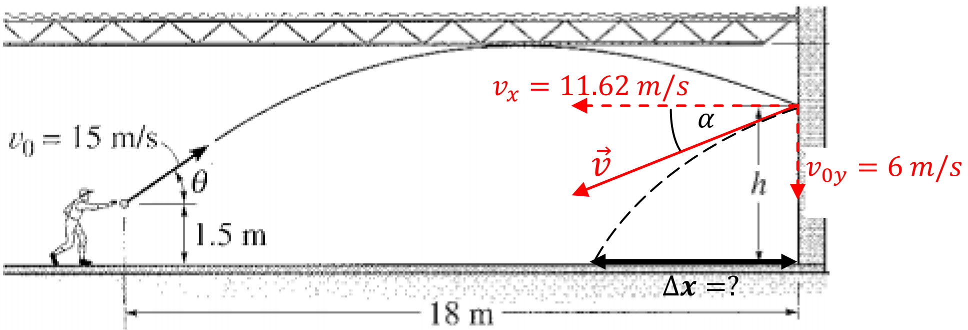
$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta - gt = 15\sin 39.23° - 10 \cdot 1.55 = -6\ m/s$$

$$v_x = v_0 \cos\theta = 15\cos 39.23° = 11.62\ m/s$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36 + 135} = 13.1\ m/s$$

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{6}{11.62} \quad => \quad \alpha = 27.31°$$

פיתרון ד': הכדור ניתז מהקיר סימטרית לפגיעה בו מבלי לשנות את גודל מהירותו. משמעות הדבר היא שרכיב x של המהירות מתהפך שמאלה בעוד רכיב y שלה נותר פונה מטה כשהיה.
בסעיף זה נקבעו כיווניהם החיוביים של הצירים שמאלה ומטה, לשם פישוט החישובים.



$\Delta x = ?$, $\Delta y = h = 4.2\ m$, $v_{0y} = 6\ m/s$, $v_x = 11.62\ m/s$

משך המעוף נקבע כרגיל על פי הציר האנכי:

$$\Delta y = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}gt^2 \quad => \quad 4.2 = 6t + 5t^2 \quad => \quad 5t^2 + 6t - 4.2 = 0 \quad => \quad t = 0.495\ s$$

בפרק זמן זה עף הכדור שמאלה ומטה במסלול בליסטי תוך שהרכיב האופקי v_x של מהירותו נותר קבוע, לכן

$$\Delta x = v_x t = 11.62 \cdot 0.495 = 5.76\ m$$