אינטגרל העבודה

$$\textbf{The definition:}\quad W = \int_{t=a}^{t=b} \vec{F}\cdot\hat{T}ds$$

$$W = \int_{t=a}^{t=b} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_a^b \vec{F}\cdot\vec{v}dt$$

העבודה המתבצעת ע"י שדה הכוח $\vec{F}$ היא

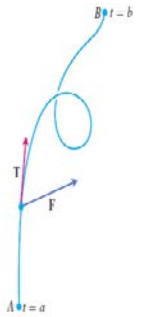
האינטגרל הקווי של הרכיב הסקלארי

$\vec{F}\cdot\hat{T}$ לאורך העקום החלק מ-A ל-B.

$\vec{F}$ הוא ווקטור הכוח.

$\hat{T}$ הוא ווקטור יחידה משיק לעקום.

$\vec{F}\cdot\hat{T}$ הוא $F_{\|}$ - רכיבו המשיקי של $\vec{F}$.



המכפלה הסקלארית $\vec{F}\cdot\hat{T}ds$ היא למעשה הכפלתו של רכיב הכוח <u>המקביל לעקום</u> $(\vec{F}\cdot\hat{T})$ בקטע קצרצר של עקום (ds), ושווה לעבודה שמבצע הכוח $\vec{F}$ לאורך אותו קטע קצרצר של עקום: $\vec{F}\cdot\hat{T}ds = F_{\|}ds = dW$

אינטגרציה של dW לאורך העקום כולו מניבה את W - העבודה הכוללת שמבצע הכוח.

כדי לחשב את אינטגרל העבודה לאורך עקום חלק $\vec{r}_{(t)}$ יש לנקוט בצעדים הבאים:

א. לבטא את $\vec{F}$ על העקום כפונקציה של הפרמטר t

ב. למצוא את $\frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt}$, ז"א את המהירות $\vec{v}_{(t)}$.

ג. לחשב אינטגרל של $\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt}$ מ- $t=a$ עד $t=b$, ז"א אינטגרל של ההספק, ולקבל את העבודה.

דוגמה לחישוב העבודה המתבצעת לאורך

עקום חלק במרחב ע"י כוח משתנה

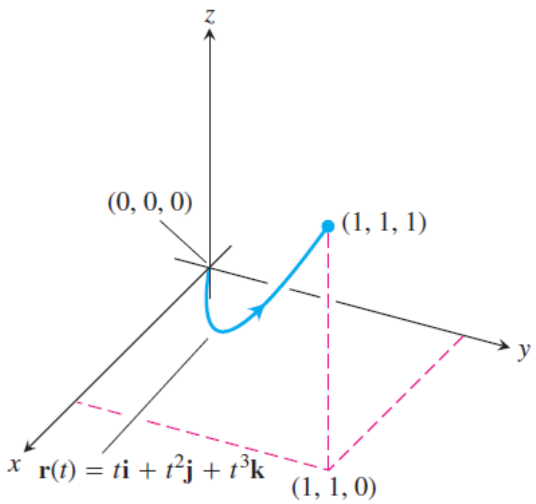
חשב את העבודה שמבצע

$$\vec{F} = (y-x^2)\hat{x} + (z-y^2)\hat{y} + (x-z^2)\hat{z}$$

לאורך העקום

$$\vec{r}_{(t)} = t\hat{x} + t^2\hat{y} + t^3\hat{z} \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

מ- $(0,0,0)$ עד $(1,1,1)$.



פיתרון:

$$\vec{r}_{(t)} = t\hat{x} + t^2\hat{y} + t^3\hat{z} \quad => \quad (\text{מהירות})\vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt} = \hat{x} + 2t\hat{y} + 3t^2\hat{z}$$

$$\vec{F}_{(x,y,z)} = (y-x^2)\hat{x} + (z-y^2)\hat{y} + (x-z^2)\hat{z}$$

$$\vec{F}_{(t,t^2,t^3)} = (t^2-t^2)\hat{x} + (t^3-t^4)\hat{y} + (t-t^6)\hat{z} \quad => \quad (\text{כוח על העקום})\,\vec{F}_{(t,t^2,t^3)} = 0\hat{x} + (t^3-t^4)\hat{y} + (t-t^6)\hat{z}$$

$$P_{(t)} = \vec{F}_{(t,t^2,t^3)}\cdot\frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt} = 2t(t^3-t^4) + 3t^2(t-t^6) \quad => \quad (\text{הספק})\,P_{(t)} = -3t^8 - 2t^5 + 2t^4 + 3t^3$$

$$W = \int_0^1 \left(-3t^8 - 2t^5 + 2t^4 + 3t^3\right)dt = \left[-\frac{t^9}{3} - \frac{t^6}{3} + \frac{2t^5}{5} + \frac{3t^4}{4}\right|_0^1 = \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} - 0 = \frac{29}{60}\right.$$

אם הכוח נמדד בניוטונים, הדרך במטרים והזמן בשניות, מתקבלת המהירות במטרים לשנייה, ההספק בג'אול לשנייה (וואט) והעבודה בג'אולים.

סיכום

הגדרה – עבודה לאורך עקום חלק

העבודה המתבצעת ע"י שדה כוח $\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y} + P\hat{z}$ לאורך עקום חלק $\vec{r}_{(t)}$ מ- $t = a$ עד $t = b$ הינה

$$W = \int_{t=a}^{t=b} \vec{F} \cdot \hat{T} ds$$

שש דרכים שונות לכתיבת אינטגרל העבודה

למרות השוני שביניהן, כל שש הנוסחאות מחושבות באותו האופן (אותיות מודגשות הן ווקטורים).

$\vec{r}_{(t)} = g_{(t)}\hat{x} + h_{(t)}\hat{y} + k_{(t)}\hat{z} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ הוא עקום חלק
ו- $d\vec{r} = dg\hat{x} + dh\hat{y} + dk\hat{z}$ הוא הדיפרנציאל שלו.

$\mathbf{W} = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$	The definition
$= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	Compact differential form
$= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$	Expanded to include dt; emphasizes the parameter t and velocity vector $d\mathbf{r}/dt$
$= \int_a^b \left(M\frac{dg}{dt} + N\frac{dh}{dt} + P\frac{dk}{dt} \right) dt$	Emphasizes the component functions
$= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt} \right) dt$	Abbreviates the components of $\mathbf{r}$
$= \int_a^b M\, dx + N\, dy + P\, dz$	dt's canceled; the most common form