אי תלות במסלול

אם $\boldsymbol{A}$ ו- $\boldsymbol{B}$ הן שתי נקודות באזור פתוח $\boldsymbol{D}$ שבמרחב, העבודה $\int \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ המבוצעת בהזזת חלקיק מ- $\boldsymbol{A}$ ל- $\boldsymbol{B}$ ע"י שדה $\vec{\boldsymbol{F}}$ המוגדר על $\boldsymbol{D}$, תלויה בד"כ במסלול $\boldsymbol{C}$ שנבחר.

עם זאת, ישנם שדות מסוימים שעבורם ערך האינטגרל זהה עבור כל מסלול מ- $\boldsymbol{A}$ ל- $\boldsymbol{B}$ שנבחר.

הגדרות – אינטגרל שאינו תלוי מסלול ושדה משמר

יהי $\vec{\boldsymbol{F}}$ שדה אשר מוגדר על תחום פתוח $\boldsymbol{D}$ במרחב, ונניח שלכל שתי נקודות $\boldsymbol{A}$ ו- $\boldsymbol{B}$ שב- $\boldsymbol{D}$ העבודה $\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ אשר מבוצעת בתזוזה מ- $\boldsymbol{A}$ ל- $\boldsymbol{B}$ <u>זהה</u> בכל המסלולים מ- $\boldsymbol{A}$ ל- $\boldsymbol{B}$.

או אז, האינטגרל $\int \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ <u>אינו תלוי מסלול</u> ב- $\boldsymbol{D}$, והשדה $\vec{\boldsymbol{F}}$ הינו <u>משמר על $\boldsymbol{D}$</u> .

בתנאי גזירות רגילים, שדה $\vec{\boldsymbol{F}}$ הינו משמר אם ורק אם הוא מהווה <u>שדה גרדיאנט של פונקציה סקלארית $\boldsymbol{f}$</u>.

במקרה זה שבו $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f}$, הפונקציה הסקלארית $\boldsymbol{f}$ נקראת פונקצית הפוטנציאל של $\vec{\boldsymbol{F}}$.

פוטנציאל חשמלי למשל, הוא פונקציה סקלארית שהגרדיאנט שלה הוא השדה החשמלי.

אם $\boldsymbol{f}$ ידועה, קל לחשב את ערכו של אינטגרל העבודה בכל מסלול שהוא מ- $\boldsymbol{A}$ ל- $\boldsymbol{B}$ באמצעות:

$$\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{B})} - \boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{A})}$$

הדמיון למשפט ניוטון-לייבניץ אינו מקרי, אם חושבים על $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f}$ כעל נגזרת של פונקציה רבת משתנים $\boldsymbol{f}$.

נוכיח כעת שהתנאי $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f}$ משמעו אי תלות של האינטגרל במסלול האינטגרציה:

נניח ש- $\boldsymbol{A}$ ו- $\boldsymbol{B}$ הן שתי נקודות ב- $\boldsymbol{D}$ וש- $\boldsymbol{C}\colon\ \vec{\boldsymbol{r}}_{(t)} = \boldsymbol{g}_{(t)}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}_{(t)}\hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{k}_{(t)}\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{b}$, הוא עקום חלק ב- $\boldsymbol{D}$ המחבר בין $\boldsymbol{A}$ ו- $\boldsymbol{B}$. כמו כן, לאורך העקום, $\boldsymbol{f}$ היא פונקציה גזירה של $\boldsymbol{t}$.

נזכור שעל העקום $\boldsymbol{C}$ מתקיים $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}_{(t)}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_{(t)}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{k}_{(t)}$ ומכאן $\frac{dx}{dt} = \frac{dg}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{dk}{dt}$

ע"פ כלל השרשרת

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}}\frac{d\boldsymbol{z}}{d\boldsymbol{t}} \quad => \quad \boldsymbol{on\ C\ we\ have} \quad \frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{g}}{d\boldsymbol{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{d\boldsymbol{h}}{d\boldsymbol{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}}\frac{d\boldsymbol{k}}{d\boldsymbol{t}}$$

כעת נרשום את $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f}$ ואת $\frac{d\vec{r}}{dt}$, נכפול אותם סקלארית, ונראה שמתקבל $\frac{df}{dt}$ אשר פיתחנו לעיל בעזרת כלל השרשרת:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{d\boldsymbol{g}}{d\boldsymbol{t}}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{d\boldsymbol{h}}{d\boldsymbol{t}}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{d\boldsymbol{k}}{d\boldsymbol{t}}\hat{\boldsymbol{z}} \quad => \quad \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f} \cdot \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{g}}{d\boldsymbol{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{d\boldsymbol{h}}{d\boldsymbol{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}}\frac{d\boldsymbol{k}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{t}}$$

אם נרשום $\vec{\boldsymbol{F}}$ במקום $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f}$ (התנאי שעליו נשענת ההוכחה) נקבל שעל העקום השרירותי $\boldsymbol{C}$ מתקיים $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{df}{dt}$

$$\boldsymbol{W} = \int_{\boldsymbol{C}} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{t=a}^{t=b} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{d\boldsymbol{t}} d\boldsymbol{t} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{t}} d\boldsymbol{t} = \boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{g}_{(t)}, \boldsymbol{h}_{(t)}, \boldsymbol{k}_{(t)})}\Big|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{B})} - \boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{A})}$$

המשפט היסודי של אינטגרלים קוויים

יהי $\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y} + P\hat{z}$ שדה ווקטורי אשר רכיביו רציפים באזור פתוח ומחובר D שבמרחב.

קיימת אז פונקציה גזירה f כך ש- $\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$, אם ורק אם לכל הנקודות A ו- B שב- D

הערך של $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ אינו תלוי במסלול מ- A ל- B ב- D.

דוגמה לחישוב העבודה המבוצעת ע"י שדה משמר:

מצא את העבודה המבוצעת ע"י השדה $\vec{F} = yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z} = \vec{\nabla}(xyz)$ לאורך עקום C כלשהו המחבר בין הנקודות $A(-1,3,9)$ ו- $B(1,6,-4)$.

פיתרון:

$$Given\ that\ \vec{F} = \vec{\nabla}(xyz) \ \Rightarrow\ f = xyz$$

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r} = f_{(B)} - f_{(A)} = xyz\Big|_{(1,6,-4)} - xyz\Big|_{(-1,3,9)} = -24 - (-27) = 3$$

אם כך, ערכו של אינטגרל העבודה בשדה משמר תלוי <u>רק</u> בערכיה של f ב- A ו- B, ולא במסלול שביניהן.

לשדה משמר תכונה ייחודית נוספת - האינטגרל סביב כל מסלול סגור ב- D הוא אפס.

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f \text{ on } D \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} \text{ conservative on } D \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

כיצד ניתן לקבוע (באופן אנאליטי) ששדה הינו משמר? באמצעות מבחן הרכיבים לשדות משמרים:

יהי $\vec{F} = M_{(x,y,z)}\hat{x} + N_{(x,y,z)}\hat{y} + P_{(x,y,z)}\hat{z}$ שדה אשר לפונקציות הרכיבים שלו $(M, N,$ ו- $P)$ ישנן נגזרות חלקיות ראשונות שהינן רציפות. או אז, $\vec{F}$ משמר אם ורק אם

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

ההוכחה ששוויונים אלה משמעם ש- $\vec{F}$ משמר, נשענת על משפט סטוקס ולכן נדלג עליה כאן.

נוכיח אבל את המשפט ההפוך, קרי, שאם $\vec{F}$ משמר אז השוויונים הללו מתקיימים.

נעשה זאת עבור אחד מהם בלבד, כדוגמא.

נישען על העובדה שאם $\vec{F}$ משמר אז ישנה פונקצית פוטנציאל f כך שמתקיים $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, ז"א מתקיים:

$$\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y} + P\hat{z} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial z}$$

דוגמה למציאת פונקציית פוטנציאל:

הראה כי $\vec{F} = (e^x \cos y + yz)\hat{x} + (xz - e^x \sin y)\hat{y} + (xy + z)\hat{z}$ משמר ומצא פונקצית פוטנציאל עבורו.

<u>פיתרון</u>: נשתמש במבחן הרכיבים לשדות משמרים עבור

$$M = e^x \cos y + yz \quad , \quad N = xz - e^x \sin y \quad , \quad P = xy + z$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

כעת אנו יודעים ש- $\vec{F}$ משמר, ז"א ישנה פונקציה סקלארית f ש- $\vec{F}$ הוא הגרדיאנט שלה. נמצא אותה ע"י אינטגרציה של M לפי x, של N לפי y ושל P לפי z.

$$f_{(x,y,z)} = \int M\,dx = \int (e^x \cos y + yz)\,dx = e^x \cos y + yzx + g_{(y,z)}$$

את קבוע האינטגרציה רשמנו כפונקציה של y ו- z כי ערכו עשוי להשתנות אם y ו- z משתנים.

כעת נגזור לפי y את $f_{(x,y,z)}$ שקיבלנו

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y + yzx + g_{(y,z)}\right) = -e^x \sin y + zk + \frac{\partial g}{\partial y}$$

ונשווה ל- N, שהינו כזכור הנגזרת של f לפי y

$$-e^x \sin y + zx + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y \quad => \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

קיבלנו ש- g אינה תלויה ב- y ואם כך היא פונקציה של z בלבד, אם בכלל

$$f_{(x,y,z)} = e^x \cos y + yzx + g_{(z)}$$

כעת נגזור לפי z את $f_{(x,y,z)}$ שקיבלנו

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^x \cos y + yzx + g_{(z)}\right) = xy + \frac{\partial g}{\partial z}$$

ונשווה ל- P, שהינו כזכור הנגזרת של f לפי z

$$xy + \frac{\partial g}{\partial z} = xy + z \quad => \quad \frac{\partial g}{\partial z} = z \quad => \quad g_{(z)} = \frac{z^2}{2} + C$$

נציב בתוצאת האינטגרל הראשון, זה של M לפי x, ונקבל את $f_{(x,y,z)}$ במפורש

$$f_{(x,y,z)} = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

אם כך ישנן אינסוף פונקציות פוטנציאל של $\vec{F}$, אחת לכל ערך של C. בדיקה לסיום:

$$\vec{\nabla} f = (e^x \cos y + yz)\hat{x} + (xz - e^x \sin y)\hat{y} + (xy + z)\hat{z} = \vec{F}$$

דוגמה לשדה שאינו משמר:

הראה ש- $\vec{F} = (2x-3)\hat{x} - z\hat{y} + (\cos z)\hat{z}$ אינו משמר

פיתרון: נשתמש במבחן הרכיבים לשדות משמרים עבור

$$M = 2x - 3 \quad , \quad N = -z \quad , \quad P = \cos z$$

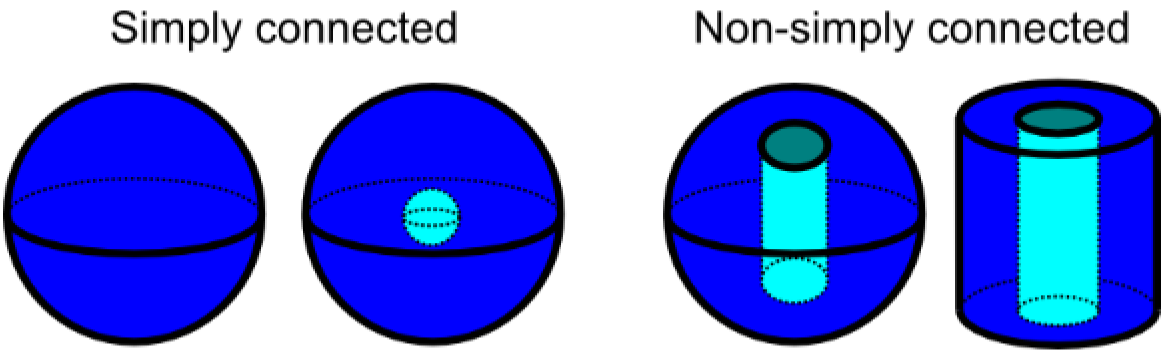
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \neq \frac{\partial N}{\partial z} = -1 \quad => \quad \vec{F}\ is\ not\ conservative \quad => \quad \vec{F}\ is\ not\ a\ gradient\ field!$$

הנחות שהונחו ומושגים נחוצים להבנתן

הנחנו כי כל העקומים מורכבים ממספר סופי של קטעים חלקים המחוברים בקצותיהם, ושלרכיביו של $\vec{F}$ ישנן נגזרות ראשונות רציפות. כאשר $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, רציפות זו מבטיחה שהנגזרות השניות המעורבות של פונקצית הפוטנציאל f תהיינה שוות זו לזו, ובכך מתקפת את מבחן הרכיבים לשדות משמרים.

הנחנו ש- D הוא תחום פתוח במרחב, היינו, אוסף כל הנקודות שבחלל תחום ללא אלה שעל המשטח התוחם (באופן פורמאלי: כל נקודה ב- D היא מרכזו של כדור פתוח אשר נמצא כולו ב- D).

הנחנו גם ש- D מחובר. בתחום פתוח, משמעות הדבר היא שניתן לחבר כל נקודה לכל נקודה אחרת באמצעות עקום חלק אשר נמצא כולו ב- D. לבסוף, הנחנו גם ש- D מחובר באופן פשוט, קרי, ניתן לכווץ כל לולאה ב- D לכדי נקודה ב- D מבלי שהלולאה תעזוב את D.



תבניות דיפרנציאליות מדויקות

את אינטגרל העבודה ואינטגרל הזרימה נוח לבטא בתבניתם הדיפרנציאלית $\int_A^B Mdx + Ndy + Pdz$.

הם קלים לחישוב אם $Mdx + Ndy + Pdz$ הוא הדיפרנציאל השלם של פונקציה f, כי אז

$$\int_A^B Mdx + Ndy + Pdz = \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f_{(B)} - f_{(A)}$$

הגדרה: הביטוי $M_{(x,y,z)}dx + N_{(x,y,z)}dy + P_{(x,y,z)}dz$ הוא תבנית דיפרנציאלית. תבנית דיפרנציאלית היא מדויקת על תחום D במרחב, אם $Mdx + Ndy + Pdz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$ עבור פונקציה סקלארית f כלשהי ב- D.