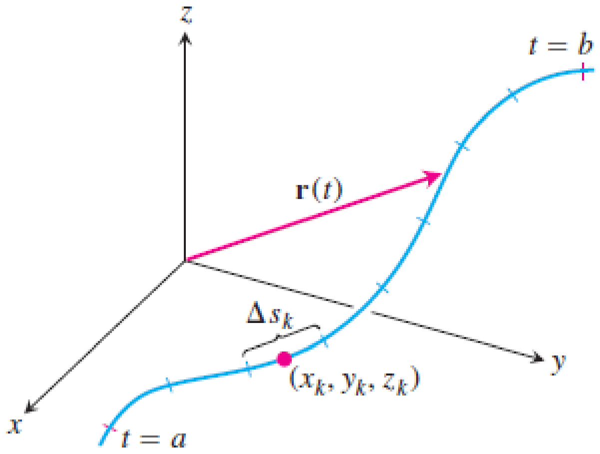
אינטגרל קווי

כאשר כוח $\vec{F}$ שכיוונו $\hat{x}$ מניע גוף לאורך קטע של ציר ה- x, אנו מחשבים את העבודה שהוא מבצע באמצעות האינטגרל המסוים של $\vec{F}dx$ בין קצוות הקטע. לחילופין, אם נרצה את מסת הקטע, נחשבה באמצעות אינטגרל מסוים של ρdx בין קצוות הקטע. אלה הם אינטגרלים קוויים <u>לאורך ציר ה- x</u>. כאשר הקטע אינו נמצא על ציר ה- x אלא על עקום כלשהו במישור או במרחב, אנו זקוקים למושג כללי יותר של אינטגרל קווי ("אינטגרל של עקום" יכול להיות שם מתאים).

נניח שאנו רוצים לבצע אינטגרציה של $f_{(x,y,z)}$ לאורך העקום $\vec{r}_{(t)} = g_{(t)}\hat{x} + h_{(t)}\hat{y} + k_{(t)}\hat{z}$, $a \le t \le b$, אשר נמצא בתחום ההגדרה של f. ערכיה של f <u>על העקום</u> מתקבלים מהפונקציה המורכבת $f_{\left(g_{(t)},h_{(t)},k_{(t)}\right)}$, כך שעלינו לבצע אינטגרציה של הפונקציה המורכבת הזו לאורך קטע של העקום מ- $t = a$ עד $t = b$.

את העקום נהוג לכנות באות יחידה, C למשל, ואז אנו כותבים את "האינטגרל של f לאורך C" באופן הבא

$\int_C f_{(x,y,z)}ds$ "The integral of f over C"



בציור משמאל - העקום $\vec{r}_{(t)}$ מחולק למקטעים קצרים מ- $t = a$ עד $t = b$. אורכו של מקטע שרירותי כזה הוא Δs_k. בכל מקטע אנו בוחרים נקודה (x_k, y_k, z_k) ואז יוצרים את הסכום

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_{(x_k,y_k,z_k)}\Delta s_k$$

אם f רציפה ו- $\vec{r}$ חלק, לסכום S_n יש גבול כאשר $n \to \infty$ ו- $\Delta s_k \to 0$. גבול זה נקרא "האינטגרל של f לאורך C"

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{(x_k,y_k,z_k)}\Delta s_k = \int_C f_{(x,y,z)}ds$$

אם $\vec{r}_{(t)}$ חלק עבור $a \le t \le b$ אז $\vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ רציפה שם, ואנו יכולים לרשום $ds = \left|\vec{v}_{(t)}\right|dt$. אנו מקבלים אז ש-

$$\int_C f_{(x,y,z)}ds = \int_a^b f_{\left(g_{(t)},h_{(t)},k_{(t)}\right)}\left|\vec{v}_{(t)}\right|dt$$

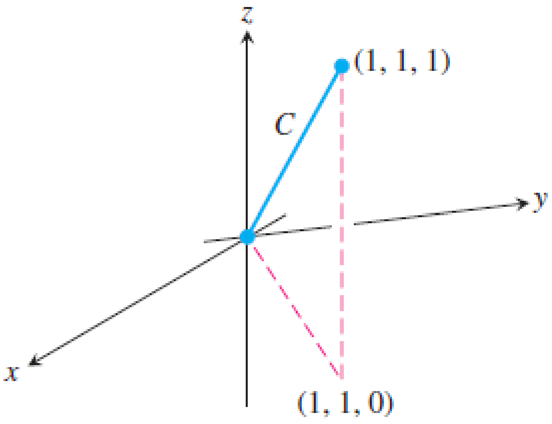
שים לב לכך שהאינטגרל באגף ימין הוא אינטגרל מסוים רגיל (לפי הפרמטר t) שאותו אנו יודעים לחשב.

לסיכום, כדי לחשב אינטגרל של פונקציה רציפה לאורך עקום C עלינו

א. למצוא פרמטריזציה חלקה עבור C: $\vec{r}_{(t)} = g_{(t)}\hat{x} + h_{(t)}\hat{y} + k_{(t)}\hat{z}$, $a \le t \le b$.

ב. לחשב כאינטגרל מסוים של משתנה יחיד בעזרת $\int_C f_{(x,y,z)}ds = \int_a^b f_{\left(g_{(t)},h_{(t)},k_{(t)}\right)}\left|\vec{v}_{(t)}\right|dt$

הערה: כאשר $f = 1$, האינטגרל של f לאורך C הוא פשוט אורכו של C.



דוגמה לחישוב אינטגרל קווי

חשב את האינטגרל של

$$f_{(x,y,z)} = x - 3y^2 + z$$

לאורך קטע הישר C שבין $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$.

פיתרון:

הפרמטריזציה הפשוטה ביותר עבור C במקרה זה היא

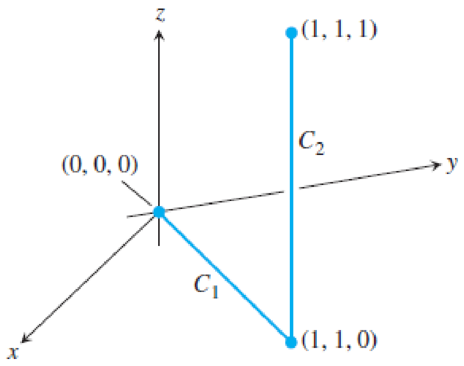
$$\vec{r}_{(t)} = g_{(t)}\hat{x} + h_{(t)}\hat{y} + k_{(t)}\hat{z} = t\hat{x} + t\hat{y} + t\hat{z} \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$f_{(x,y,z)} = x - 3y^2 + z \quad => \quad f_{(t,t,t)} = t - 3t^2 + t \quad => \quad f_{(t,t,t)} = 2t - 3t^2$$

$$\vec{r}_{(t)} = t\hat{x} + t\hat{y} + t\hat{z} \quad => \quad \vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} \quad => \quad \left|\vec{v}_{(t)}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\int_C f_{(x,y,z)} ds = \int_a^b f_{(t,t,t)} \left|\vec{v}_{(t)}\right| dt = \int_0^1 (2t - 3t^2)\sqrt{3} dt = \sqrt{3}\left[t^2 - t^3\right|_0^1 = 0$$

בעמוד הבא נחשב את האינטגרל של אותה הפונקציה לאורך מסלול אחר בין אותן שתי נקודות.
האם גם אז ערך האינטגרל יהיה אפס?



דוגמה לחישוב אינטגרל קווי לאורך שני קטעים שחוברו

חשב את האינטגרל של הפונקציה מהדוגמה הקודמת

$$f_{(x,y,z)} = x - 3y^2 + z$$

הפעם לאורך המסלול $C_1 \cup C_2$ שבין $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$.

פיתרון:

הפרמטריזציה הפשוטה ביותר עבור שני הקטעים היא

$$C_1: \quad \vec{r}_{(t)} = t\hat{x} + t\hat{y} + 0\hat{z} \quad , \quad 0 \le t \le 1 \quad => \quad \vec{v}_{1(t)} = \hat{x} + \hat{y} \quad => \quad |\vec{v}_{1(t)}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$C_2: \quad \vec{r}_{(t)} = 1\hat{x} + 1\hat{y} + t\hat{z} \quad , \quad 0 \le t \le 1 \quad => \quad \vec{v}_{2(t)} = \hat{z} \quad => \quad |\vec{v}_{2(t)}| = 1$$

ערכי הפונקציה f על העקום C_1 מתקבלים מהצבת רכיבי C_1 ב- f.

$$f_{(x,y,z)} = x - 3y^2 + z \quad => \quad f_{(t,t,0)} = t - 3t^2 + 0 \quad => \quad f_{(t,t,0)} = t - 3t^2$$

ערכי הפונקציה f על העקום C_2 מתקבלים מהצבת רכיבי C_2 ב- f.

$$f_{(x,y,z)} = x - 3y^2 + z \quad => \quad f_{(1,1,t)} = 1 - 3 \cdot 1^2 + t \quad => \quad f_{(1,1,t)} = t - 2$$

אינטגרציה לאורך C_1

$$\int_{C_1} f_{(x,y,z)} ds = \int_a^b f_{(t,t,0)} |\vec{v}_{1(t)}| dt = \int_0^1 (t - 3t^2)\sqrt{2} dt = \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - t^3\right|_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

אינטגרציה לאורך C_2

$$\int_{C_2} f_{(x,y,z)} ds = \int_a^b f_{(1,1,t)} |\vec{v}_{2(t)}| dt = \int_0^1 (t-2) \cdot 1 dt = \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right|_0^1 = -\frac{3}{2}$$

לסיכום יש לנו

$$\int_{C_1 \cup C_2} f_{(x,y,z)} ds = \int_{C_1} f_{(x,y,z)} ds + \int_{C_2} f_{(x,y,z)} ds = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}$$

שלושה דגשים באשר לשתי הדוגמאות שהובאו לעיל. ראשית, הצבת רכיבי המסלול $g_{(t)}, h_{(t)}, k_{(t)}$ בתבנית הפונקציה f הפכה את האינטגרציה ל"רגילה" לפי t. שנית, האינטגרל של f לאורך $C_1 \cup C_2$ הושג באמצעות אינטגרציה של f לאורך C_1 ולאורך C_2 בנפרד, וחיבור התוצאות. שלישית, האינטגרל של f לאורך C והאינטגרל של f לאורך $C_1 \cup C_2$ אינם שווי ערך, למרות שבשני המקרים מתחיל ומסתיים המסלול באותן הנקודות. כך הוא במרבית הפונקציות - בין <u>אותן</u> שתי נקודות, האינטגרלים לאורך מסלולים שונים מקבלים ערכים שונים. עם זאת, ישנן פונקציות שבהן ערך האינטגרל <u>אינו תלוי במסלול</u> שבין שתי הנקודות, כפי שניווכח בפרק אודות שדות משמרים.

חישובי מסה ומומנט

אנו מתייחסים לקפיצים ולתילים כמסות מבוזרות לאורך עקומים חלקים במרחב. הביזור מתואר באמצעות פונקצית צפיפות רציפה $\boldsymbol{\delta_{(x,y,z)}}$ (מסה ליח' אורך). מסת הקפיץ או התיל, מרכז המסה שלהם ומומנטים, מחושבים אז בעזרת הנוסחאות שלהלן

Mass: $$M = \int_C \delta(x, y, z)\, ds \qquad (\delta = \delta(x, y, z) = \text{density})$$

First moments about the coordinate planes:

$$M_{yz} = \int_C x\,\delta\, ds, \qquad M_{xz} = \int_C y\,\delta\, ds, \qquad M_{xy} = \int_C z\,\delta\, ds$$

Coordinates of the center of mass:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \qquad \bar{y} = M_{xz}/M, \qquad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Moments of inertia about axes and other lines:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\,\delta\, ds, \qquad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\,\delta\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\,\delta\, ds, \qquad I_L = \int_C r^2\,\delta\, ds$$

$$r(x, y, z) = \text{distance from the point } (x, y, z) \text{ to line } L$$

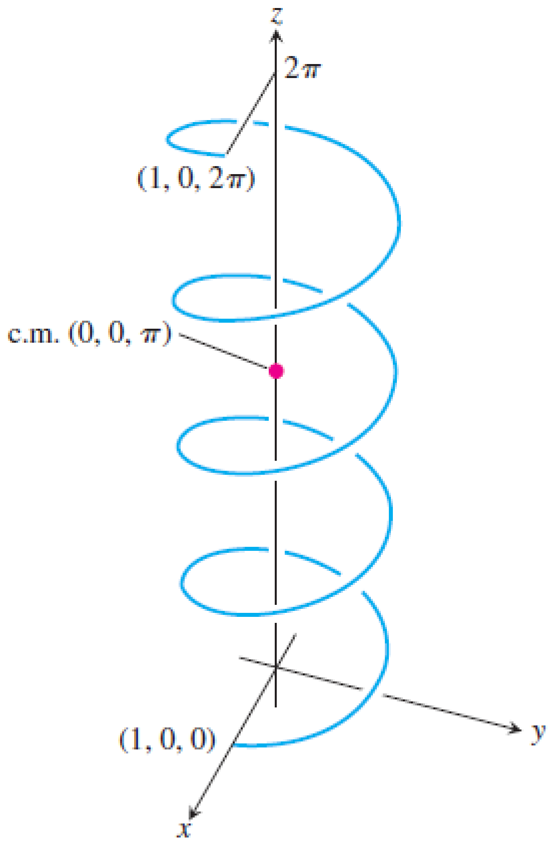
Radius of gyration about a line L: $$R_L = \sqrt{I_L/M}$$

הערות:

"מומנט ראשון" נקרא בפיזיקה "מומנט הכוח" ($\boldsymbol{\tau}$) – כוח אנכי כפול זרוע. לרוב נקרא פשוט "מומנט".

רדיוס הג'ירציה (או ג'ירדיוס) הוא רדיוס הסיבוב אשר היה מתקבל לו רוכזה מסתו המבוזרת $\boldsymbol{M}$ של הגוף לכדי מסה נקודתית מבלי לשנות את מומנט ההתמד $\boldsymbol{I_L}$ שלו.

דוגמה - מציאת מסה, מרכז מסה, מומנט התמד ורדיוס ג'ירציה



קפיץ ממוקם לאורך העקום הלולייני

$$\vec{r}_{(t)} = (\cos 4t)\hat{x} + (\sin 4t)\hat{y} + t\hat{z} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

צפיפות הקפיץ קבועה, $\delta = 1$. מצא את מסת הקפיץ ואת מרכז המסה שלו, את מומנט ההתמד שלו ואת רדיוס הג'ירציה שלו סביב ציר ה- z.

פיתרון:

מטעמי סימטריה, מרכז המסה נמצא בנקודה $(0,0,\pi)$ וחסכנו מאמץ.

לשאר החישובים נמצא ראשית את $|\vec{v}_{(t)}|$

$$\vec{v}_{(t)} = -4(\sin 4t)\hat{x} + 4(\cos 4t)\hat{y} + \hat{z} \quad =>$$

$$|\vec{v}_{(t)}| = \sqrt{16(\sin 4t)^2 + 16(\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}$$

כעת לחישוב מסת הקפיץ (כאן זהו גם אורך הקפיץ, כי צפיפות הקפיץ שווה ל- 1).

$$M = \int_C \delta_{(x,y,z)} ds = \int_a^b \delta_{(\cos 4t, \sin 4t, t)} |\vec{v}_{(t)}| dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sqrt{17} dt = \sqrt{17} \left[t \right|_0^{2\pi} = 2\sqrt{17}\pi$$

הלאה לחישוב מומנט ההתמד של הקפיץ סביב ציר ה- z.
מעט מחשבה תביאנו להבנה שמומנט ההתמד של הקפיץ סביב צירו הוא כשל טבעת בעלת אותו הרדיוס ואותה המסה.
מומנט ההתמד של טבעת בעלת מסה M ורדיוס R הוא כשל מסה נקודתית בעלת מסה M אשר חגה ברדיוס R סביב ציר.
כאן מדובר במסה $M = 2\sqrt{17}\pi$ אשר חגה סביב ציר ה-z ברדיוס (ג'ירציה בהגדרה) $R = 1$, לכן מומנט ההתמד שלה הינו

$$I_z = MR^2 = 2\sqrt{17}\pi \cdot 1^2 = 2\sqrt{17}\pi$$

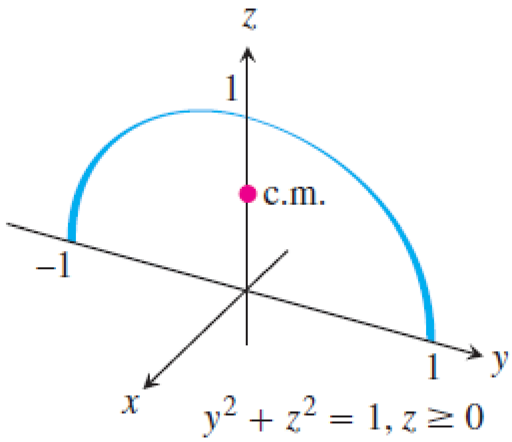
בכל זאת, למען הלא פיזיקאים, להלן הדרך הפורמאלית לפי הנוסחה. הקפיץ סובב סביב ציר ה-z ולכן אנו מחפשים את I_z

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta_{(x,y,z)} ds = \int_a^b f_{(\cos 4t, \sin 4t, t)} \delta_{(\cos 4t, \sin 4t, t)} |\vec{v}_{(t)}| dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\cos^2(4t) + \sin^2(4t)] 1\sqrt{17} dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{17} dt = \sqrt{17} \left[t \right|_0^{2\pi} = 2\sqrt{17}\pi$$

לבסוף, חישוב רדיוס הג'ירציה של הקפיץ סביב ציר ה- z, אשר הבנו כבר קודם שהינו $R_z = 1$ אך כעת פורמאלית לפי הנוסחה

$$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{17}\pi}{2\sqrt{17}\pi}} = 1$$



דוגמה - מציאת מרכז המסה של קשת

קשת דקה ממתכת שוכנת על חצי מעגל יחידה כמוראה בציור.

מצא את מרכז המסה של הקשת אם $\delta_{(x,y,z)} = 2 - z$

פיתרון:

הפרמטריזציה הפשוטה ביותר עבור הקשת היא

$$\vec{r}_{(t)} = (\cos t)\hat{y} + (\sin t)\hat{z} \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\vec{v}_{(t)} = (-\sin t)\hat{y} + (\cos t)\hat{z} \quad => \quad \left|\vec{v}_{(t)}\right| = 1$$

מטעמי סימטריה ברור שמרכז המסה נמצא על ציר ה-z, לכן אנו זקוקים <u>רק</u> למומנט הקשת יחסית למישור xy

$$M_{xy} = \int_C z\delta_{(x,y,z)}ds = \int_0^{\pi} \sin t\,(2 - \sin t) \cdot 1dt = 2\int_0^{\pi} \sin t\, dt - \int_0^{\pi} sin^2 t dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin t\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2t)dt = -2\left[\cos t\right|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin t\right|_0^{\pi} = 4 - \frac{\pi}{2}$$

כעת נחשב את מסת הקשת

$$M = \int_C \delta_{(x,y,z)}ds = \int_0^{\pi}(2 - \sin t) \cdot 1dt = \left[2t + \cos t\right|_0^{\pi} = 2\pi - 1 - (1) = 2\pi - 2$$

לבסוף, לקבלת המרחק של מרכז המסה ממישור xy, נחלק את מומנט הקשת יחסית למישור xy, במסת הקשת

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{4 - \frac{\pi}{2}}{2\pi - 2} = \frac{8 - \pi}{4\pi - 4} \approx 0.57$$