תיאורמת גרין במישור

מהטבלה שבסוף הפרק "אינטגרל העבודה" אנו יודעים שכל אינטגרל קווי $\int_C \boldsymbol{M}d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}d\boldsymbol{y}$ יכול להיכתב כאינטגרל זרימה $\int_{t=a}^{t=b} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \widehat{\boldsymbol{T}} ds$. אם האינטגרל אינו תלוי מסלול, השדה $\vec{\boldsymbol{F}}$ משמר ואנו יכולים להעריך את האינטגרל בקלות מתוך פונקצית הפוטנציאל המתאימה. בפרק זה נלמד כיצד להעריך את האינטגרל אם הוא אינו של שדה משמר, אלא של שטף או זרימה על פני עקום סגור במישור $\boldsymbol{xy}$. נשתמש בתיאורמת גרין אשר ממירה את האינטגרל הקווי על העקום הסגור לאינטגרל כפול על פני האזור שעקום הסגור תוחם.

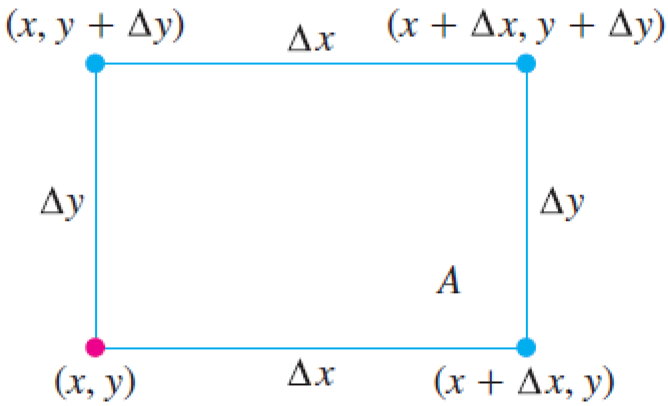
צורה אחת של תיאורמת גרין ממירה את האינטגרל הקווי של השטף לאינטגרל כפול של הדיברגנץ.

צורה שנייה של תיאורמת גרין ממירה את האינטגרל הקווי של הזרימה לאינטגרל כפול של הרוטור.

דיברגנץ (צפיפות השטף)

כדי להבין את תיאורמת גרין בצורתה הראשונה, יש להבין מהו דיברגנץ (Divergence) של שדה ווקטורי בנקודה.

אנו משיגים את הדיברגנץ באופן הבא. נניח ש- $\vec{\boldsymbol{F}}_{(x,y)} = \boldsymbol{M}_{(x,y)}\widehat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{N}_{(x,y)}\widehat{\boldsymbol{y}}$ הוא שדה המהירות של זרימת נוזל במישור, ושהנגזרות החלקיות הראשונות של $\boldsymbol{M}$ ושל $\boldsymbol{N}$ רציפות בכל נקודה שבתחום $\boldsymbol{R}$. יהי $\boldsymbol{A}$ מלבן קטן ב- $\boldsymbol{R}$ שצלעותיו מקבילות לצירי המערכת ושאחד מקודקודיו בנקודה $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ כמתואר באיור.



הקצב שבו יוצא נוזל מהמלבן דרך צלעו התחתונה הוא בקירוב

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{(x,y)} \cdot (-\widehat{\boldsymbol{y}})\Delta \boldsymbol{x} \; = \; -\boldsymbol{N}_{(x,y)}\Delta \boldsymbol{x}$$

זהו רכיב המהירות (סקלארי) בנקודה $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ אשר מאונך לצלע התחתונה בכיוון מטה, מוכפל באורכה. אם המהירות נמדדת ביחידות של $\frac{m}{s}$, קצב יציאת הנוזל מתקבל ביחידות של $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$.

הקצב שבו יוצא נוזל מהמלבן דרך כ"א משלוש צלעותיו האחרות מתקבל באופן דומה, ובסיכומו של דבר יש לנו

צלע עליונה: $\vec{\boldsymbol{F}}_{(x,y+\Delta y)} \cdot (\widehat{\boldsymbol{y}})\Delta \boldsymbol{x} \; = \; \boldsymbol{N}_{(x,y+\Delta y)}\Delta \boldsymbol{x}$

צלע תחתונה: $\vec{\boldsymbol{F}}_{(x,y)} \cdot (-\widehat{\boldsymbol{y}})\Delta \boldsymbol{x} \; = \; -\boldsymbol{N}_{(x,y)}\Delta \boldsymbol{x}$

צלע ימנית: $\vec{\boldsymbol{F}}_{(x+\Delta x,y)} \cdot (\widehat{\boldsymbol{x}})\Delta \boldsymbol{y} \; = \; \boldsymbol{M}_{(x+\Delta x,y)}\Delta \boldsymbol{y}$

צלע שמאלית: $\vec{\boldsymbol{F}}_{(x,y)} \cdot (-\widehat{\boldsymbol{x}})\Delta \boldsymbol{y} \; = \; -\boldsymbol{M}_{(x,y)}\Delta \boldsymbol{y}$

מצירופן של צלעות נגדיות מתקבל

צלע עליונה וצלע תחתונה: $\left(\boldsymbol{N}_{(x,y+\Delta y)} - \boldsymbol{N}_{(x,y)}\right)\Delta \boldsymbol{x} \; \approx \; \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta \boldsymbol{y}\right)\Delta \boldsymbol{x}$

צלע ימנית וצלע שמאלית: $\left(\boldsymbol{M}_{(x+\Delta x,y)} - \boldsymbol{M}_{(x,y)}\right)\Delta \boldsymbol{y} \; \approx \; \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta \boldsymbol{x}\right)\Delta \boldsymbol{y}$

מחיבור שתי המשוואות הנ"ל מתקבל שקצב יציאת הנוזל מהמלבן (קרי, השטף דרך צלעות המלבן) הינו

$$\textit{Flux across rectangle boundary} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

את התוצאה נחלק כעת בשטח המלבן $\Delta x \Delta y$ כדי לקבל את השטף ליחידת שטח - צפיפות השטף במלבן

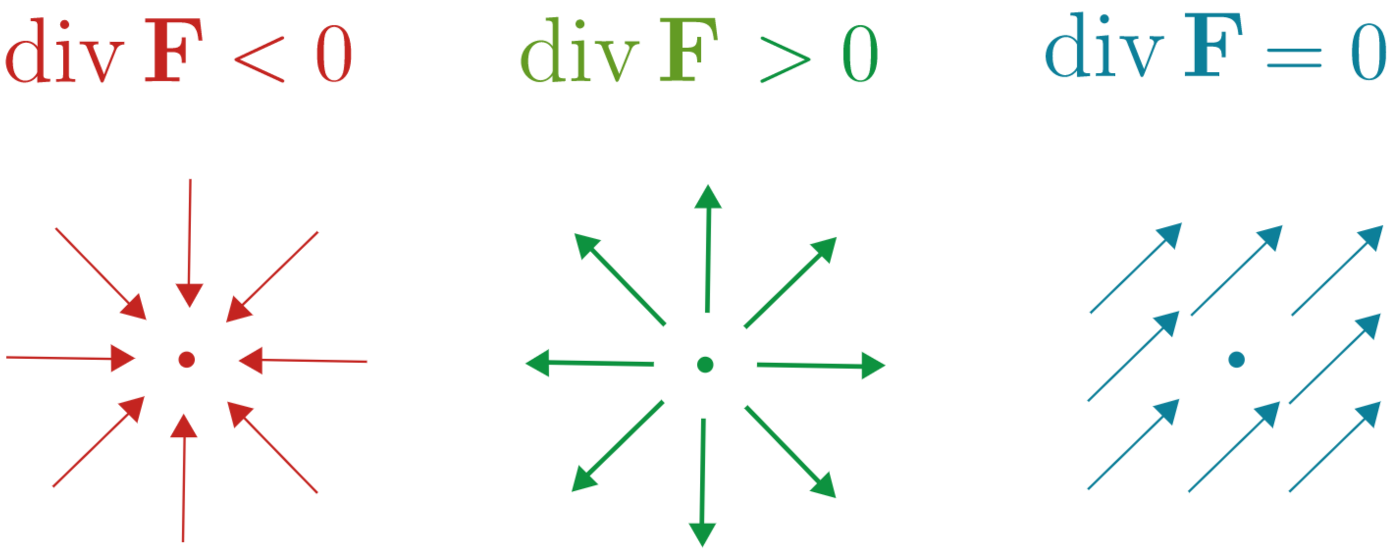
$$\textit{Flux density inside rectangle} \approx \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

כעת נשאיף רעיונית את Δx ואת Δy לאפס, וקיבלנו את צפיפות השטף של $\vec{F}$ בנקודה (x, y) – הדיברגנץ בנקודה.

הגדרה: הדיברגנץ (צפיפות שטף) של שדה וקטורי $\vec{F}_{(x,y)} = M\hat{x} + N\hat{y}$ בנקודה (x, y) הינו הסקלאר

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

דימוי נוח הוא גז מתפשט בנקודה (דיברגנץ חיובי), נדחס בה (דיברגנץ שלילי) או זורם על פניה (דיברגנץ אפס).



דוגמה למציאת הדיוורגנץ (צפיפות השטף) של שדה ווקטורי:

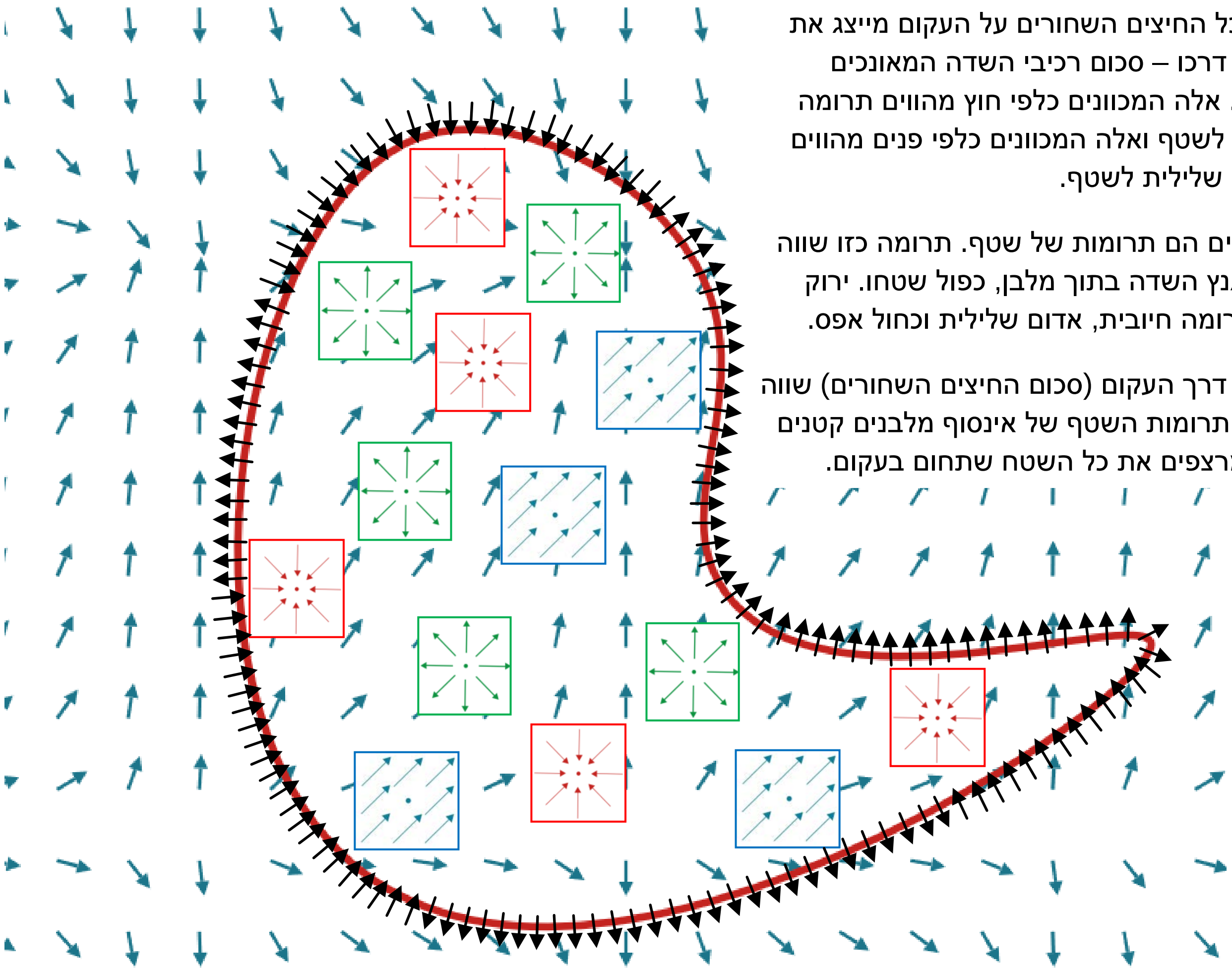
מצא את הדיוורגנץ של $\vec{F}_{(x,y)} = (x^2 - y)\hat{x} + (xy - y^2)\hat{y}$

<u>פיתרון</u>: עם $M = x^2 - y$ ו- $N = xy - y^2$ יש לנו

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 2x + x - 2y = 3x - 2y$$

שים לב – הנוסחה $\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$ (דיברגנץ כפול שטח) להערכת השטף דרך עקום סגור במישור תקפה רק לעקום <u>מלבני קטן</u>. למציאת השטף דרך עקום סגור <u>כלשהו</u> במישור, עלינו לסכום את תרומות השטף של כל המלבנים הקטנים אשר תחומים בעקום (להלן תיאורמת גרין), או לסכום "מקטעי שטף" לאורך העקום הסגור באמצעות אינטגרל השטף אשר נדון בפרק קודם**.** המחשה לכך בעמוד הבא.

המחשת גרסת השטף-דיברגנץ של תיאורמת גרין – השטף דרך עקום סגור שווה לסכום תרומות השטף של מלבנים קטנים אשר כלואים בו. תרומת כל מלבן שווה לדיוורגנץ השדה בתוכו כפול שטחו.



אוסף כל החיצים השחורים על העקום מייצג את השטף דרכו – סכום רכיבי השדה המאונכים לעקום. אלה המכוונים כלפי חוץ מהווים תרומה חיובית לשטף ואלה המכוונים כלפי פנים מהווים תרומה שלילית לשטף.

המלבנים הם תרומות של שטף. תרומה כזו שווה לדיוורגנץ השדה בתוך מלבן, כפול שטחו. ירוק הינו תרומה חיובית, אדום שלילית וכחול אפס.

השטף דרך העקום (סכום החיצים השחורים) שווה לסכום תרומות השטף של אינסוף מלבנים קטנים אשר מרצפים את כל השטח שתחום בעקום.

סיכום גרסת השטף–דיברגנץ של תיאורמת גרין

השטף כלפי חוץ של שדה $\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y}$ דרך עקום סגור C שווה לאינטגרל הכפול של $div\,\vec{F}$ על פני התחום R אשר תחום ב- C.

$$Flux\ of\ \left(\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y}\right)\ across\ C \quad = \quad \int_C \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds \quad = \quad \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

לשם תזכורת, נרשום שוב את אינטגרל השטף בו דנו בפרק קודם

$$Flux\ of\ \left(\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y}\right)\ across\ C \quad = \quad \int_C \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds \quad = \quad \oint_C M\,dy - N\,dx$$

מעתה נוכל לבחור בין שתי שיטות לחישוב השטף דרך עקום סגור, ה"ישנה" באמצעות אינטגרל השטף או ה"חדשה" באמצעות אינטגרל הדיברגנץ (תיאורמת גרין), כפי שמראה הדוגמה שבעמוד הבא.

דוגמה – אישוש תיאורמת גרין

אשש את גרסת השטף–דיברגנץ של תיאורמת גרין עבור השדה $\vec{F}_{(x,y)} = (x-y)\hat{x} + x\hat{y}$ והאזור R אשר תחום במעגל היחידה $0 \le t \le 2\pi \quad , \quad C: \ r_{(t)} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y}$

פיתרון

חישוב השטף דרך עקום סגור באמצעות אינטגרל השטף:

$$\textbf{Flux of } (F = M\hat{x} + N\hat{y}) \textbf{ across } C = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \oint_C M dy - N dx \quad (Flux\ integral)$$

$$\vec{F}_{(x,y)} = (x-y)\hat{x} + x\hat{y} \quad => \quad \vec{F}_{(\cos t, \sin t)} = (\cos t - \sin t)\hat{x} + (\cos t)\hat{y}$$

$$M = \cos t - \sin t \quad , \quad N = \cos t \quad , \quad \begin{cases} x = \cos t & => \quad dx = -\sin t\, dt \\ y = \sin t & => \quad dy = \cos t\, dt \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \oint_C M dy - N dx = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)\cos t\, dt - \cos t\,(-\sin t)dt =$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} (1 + \sin 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\cos 2t}{2}\right|_0^{2\pi} = \pi$$

כעת חישוב השטף דרך עקום סגור באמצעות אינטגרל הדיוורגנץ (תיאורמת גרין):

$$\textbf{Flux of } (F = M\hat{x} + N\hat{y}) \textbf{ across } C = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dxdy \quad (Div\ integral)$$

$$\vec{F}_{(x,y)} = (x-y)\hat{x} + (x)\hat{y} \quad \to \quad \begin{cases} M = x - y & => \quad \dfrac{\partial M}{\partial x} = 1 \\ N = x & => \quad \dfrac{\partial N}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R (1+0)dxdy = \iint_R dxdy =$$

$$= \textbf{unit circle area} = \pi$$

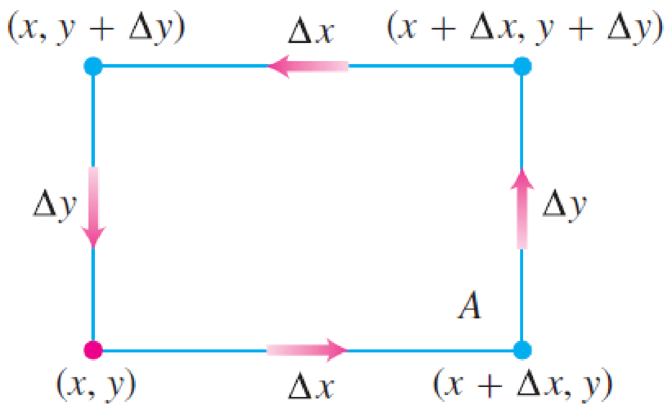
קיבלנו את אותה התוצאה בשתי הדרכים והשתכנענו שאפשר להמיר את אינטגרל השטף באינטגרל הדיברגנץ.

בעמודים הבאים נעסוק בגרסתה השנייה של תיאורמת גרין, אשר ממירה את אינטגרל הזרימה באינטגרל הרוטור.

<u>סחרור סביב ציר – צפיפות הסירקולציה (רכיב $\hat{z}$ של רוטור)</u>

כדי להבין את תיאורמת גרין בצורתה השנייה, יש להבין מהי צפיפות סירקולציה של שדה ווקטורי בנקודה. כאשר מים זורמים במישור, מהירותם על פניו אינה אחידה בד"כ. כאשר מהירות הזרימה בצידה האחד של נקודה במישור שונה מזו שבצידה האחר, נוצרת מערבולת בנקודה. אם כיוון הסחרור מנוגד לכיוון השעון אנו אומרים שהסירקולציה בנקודה חיובית, ולהפך. אנו נדון בזרימה על מישור $\boldsymbol{xy}$ כך שציר הסחרור מקביל לציר ה- $\boldsymbol{z}$.

כדי להשיג את צפיפות הסירקולציה, נשוב לשדה המהירות $\vec{F}_{(x,y)} = M_{(x,y)}\hat{x} + N_{(x,y)}\hat{y}$ ולמלבן $\boldsymbol{A}$. הסירקולציה של $\vec{F}$ סביב $\boldsymbol{A}$ נגד כיוון השעון היא סכום קצבי הזרימה ($dFlows$) לאורך צלעות המלבן.



קצב הזרימה לאורך צלעו התחתונה של המלבן הוא בקירוב

$$\vec{F}_{(x,y)} \cdot (\hat{x})\Delta x \;=\; M_{(x,y)}\Delta x$$

זהו רכיב המהירות (סקלארי) בנקודה (x, y) אשר משיק לצלע התחתונה, מוכפל באורכה. אם המהירות נמדדת ביחידות של $\frac{m}{s}$, קצב הזרימה מתקבל ביחידות של $\frac{m^2}{s}$.

קצבי הזרימה לאורך כ"א משלוש צלעותיו האחרות של המלבן מתקבלים באופן דומה, ובסיכומו של דבר יש לנו

צלע עליונה: $\vec{F}_{(x,y+\Delta y)} \cdot (-\hat{x})\Delta x \;=\; -M_{(x,y+\Delta y)}\Delta x$

צלע תחתונה: $\vec{F}_{(x,y)} \cdot (\hat{x})\Delta x \;=\; M_{(x,y)}\Delta x$

צלע ימנית: $\vec{F}_{(x+\Delta x,y)} \cdot (\hat{y})\Delta y \;=\; N_{(x+\Delta x,y)}\Delta y$

צלע שמאלית: $\vec{F}_{(x,y)} \cdot (-\hat{y})\Delta y \;=\; -N_{(x,y)}\Delta y$

מצירופן של צלעות נגדיות מתקבל

צלע עליונה וצלע תחתונה: $-\left(M_{(x,y+\Delta y)} - M_{(x,y)}\right)\Delta x \;\approx\; -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$

צלע ימנית וצלע שמאלית: $\left(N_{(x+\Delta x,y)} - N_{(x,y)}\right)\Delta y \;\approx\; \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$

מחיבור שתי המשוואות הנ"ל מתקבל שזרימת המים סביב המלבן (הסירקולציה סביב המלבן) הינה

$$\textit{Circulation around rectangle} \;\approx\; \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

את התוצאה נחלק כעת בשטח המלבן $\Delta x\Delta y$ כדי לקבל את הסירקולציה ליחידת שטח - צפיפות הסירקולציה במלבן

$$\textit{Circulation density for the rectangle} \;\approx\; \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

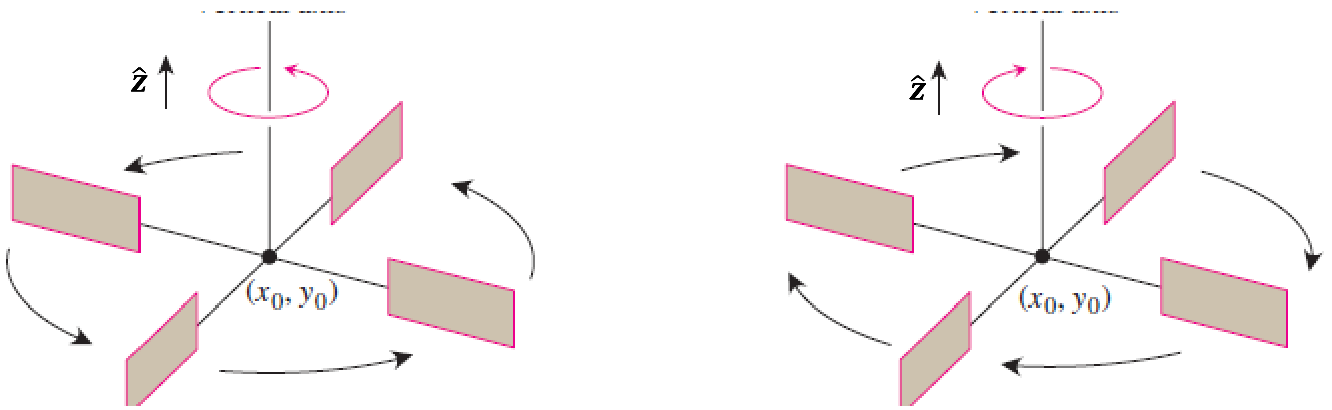
כעת נשאיף רעיונית את Δx ואת Δy לאפס, וקיבלנו את צפיפות הסירקולציה של $\vec{F}$ בנקודה (x, y).

הערה – צפיפות הסירקולציה היא למעשה רכיב $\hat{z}$ של ווקטור סירקולציה כללי יותר אשר קרוי **הרוטור** (***Curl***) **של שדה ווקטורי** $\vec{F}$. לתיאורמת גרין אנו זקוקים רק לאותו רכיב $\hat{z}$.

הגדרה: רכיב $\hat{z}$ של הרוטור (צפיפות הסירקולציה) של שדה וקטורי $\vec{F}_{(x,y)} = M\hat{x} + N\hat{y}$ בנקודה (x, y) הינו הסקלאר

$$\left(curl\,\vec{F}\right)\cdot\hat{z} \;=\; \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

אם מים נעים בשכבה דקה באיזור שבמישור xy, אז רכיב $\hat{z}$ של הרוטור בנקודה (x_0, y_0) מראה באיזו מהירות ובאיזה כיוון יסתובב גלגל כנפיים קטן אם ימוקם בנקודה כשצירו מאונך למישור.



צפיפות סירקולציה שלילית

צפיפות סירקולציה חיובית

דוגמה למציאת צפיפות הסירקולציה (רכיב $\hat{z}$ של הרוטור):

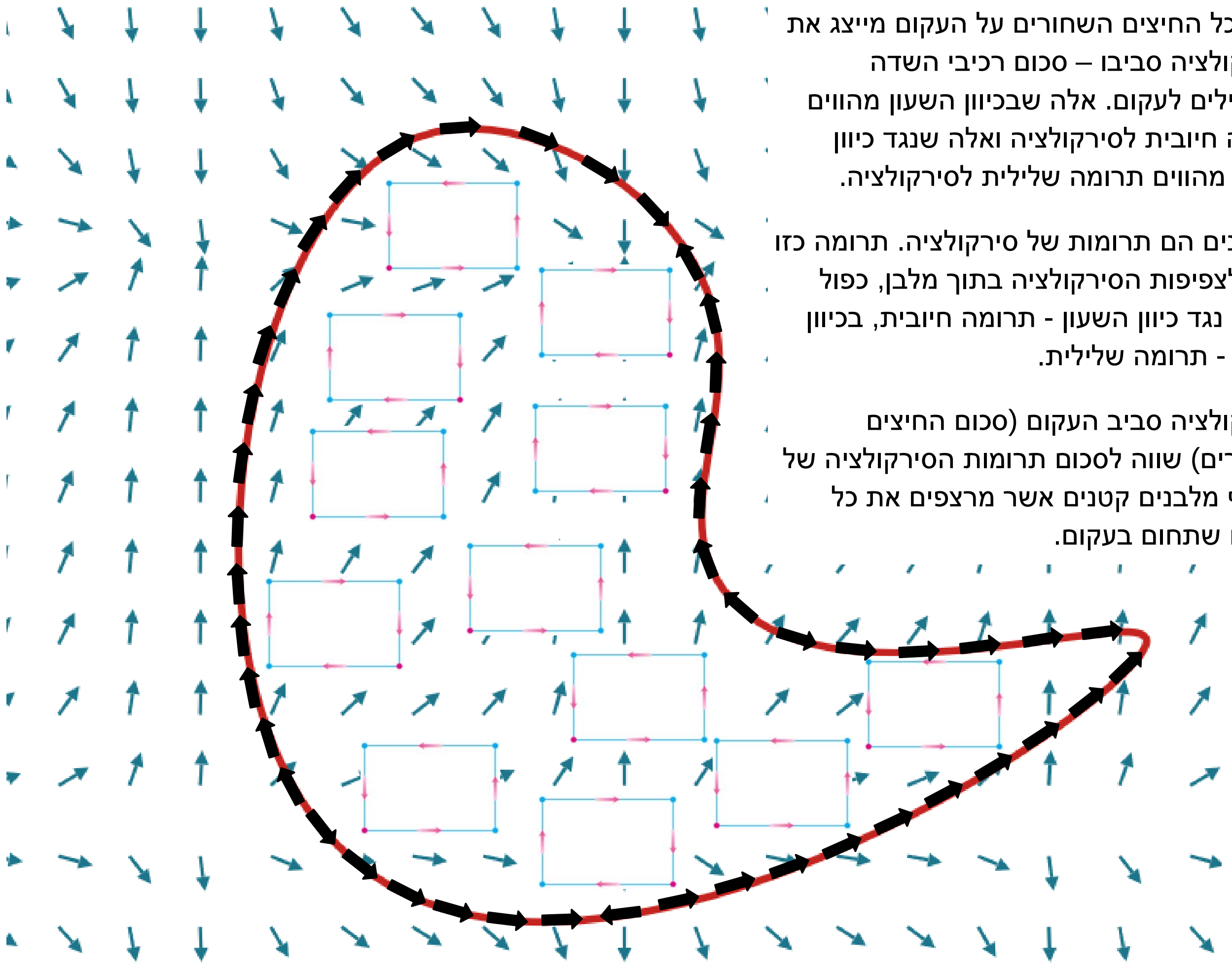
מצא את רכיב $\hat{z}$ של הרוטור של השדה $\vec{F}_{(x,y)} = (x^2 - y)\hat{x} + (xy - y^2)\hat{y}$

<u>פיתרון</u>: עם $M = x^2 - y$ ו- $N = xy - y^2$

$$\left(curl\,\vec{F}\right)\cdot\hat{z} \;=\; \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \;=\; y - (-1) \;=\; y + 1$$

שים לב – הנוסחה $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$ (צפיפות סירקולציה כפול שטח) להערכת הסירקולציה סביב עקום סגור במישור תקפה רק לעקום <u>מלבני קטן</u>. למציאת הסירקולציה סביב עקום סגור <u>כלשהו</u> במישור, עלינו לסכום את תרומות הסירקולציה של כל המלבנים הקטנים אשר תחומים בעקום (להלן תיאורמת גרין), או לסכום "מקטעים של קצבי זרימה ($dFlows$)" לאורך העקום הסגור באמצעות אינטגרל הסירקולציה אשר נדון בפרק קודם**.** המחשה לכך בעמוד הבא.

המחשת גרסת הסירקולציה-רוטור של משפט גרין – הסירקולציה סביב עקום סגור שווה לסכום תרומות הסירקולציה של מלבנים קטנים אשר כלואים בו. תרומת כל מלבן שווה לצפיפות הסירקולציה של השדה בתוכו כפול שטחו.



אוסף כל החיצים השחורים על העקום מייצג את הסירקולציה סביבו – סכום רכיבי השדה המקבילים לעקום. אלה שבכיוון השעון מהווים תרומה חיובית לסירקולציה ואלה שנגד כיוון השעון מהווים תרומה שלילית לסירקולציה.

המלבנים הם תרומות של סירקולציה. תרומה כזו שווה לצפיפות הסירקולציה בתוך מלבן, כפול שטחו. נגד כיוון השעון - תרומה חיובית, בכיוון השעון - תרומה שלילית.

הסירקולציה סביב העקום (סכום החיצים השחורים) שווה לסכום תרומות הסירקולציה של אינסוף מלבנים קטנים אשר מרצפים את כל השטח שתחום בעקום.

סיכום גרסת הסירקולציה–רוטור (רכיב $\hat{z}$) של תיאורמת גרין

הסירקולציה בכיוון השעון של שדה $\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y}$ סביב עקום סגור C שווה לאינטגרל הכפול של $(curl\,\vec{F})\cdot\hat{z}$ על פני התחום R אשר תחום ב- C

$$Circulation\ of\ (\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y})\ around\ C \quad = \quad \oint_C \vec{F}\cdot\hat{T}ds \quad = \quad \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

לשם תזכורת, נרשום את אינטגרל הזרימה (הסירקולציה במקרה זה) בו דנו בפרק קודם

$$Circulation\ of\ (\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y})\ around\ C \quad = \quad \oint_C \vec{F}\cdot\hat{T}ds \quad = \quad \oint_C Mdx + Ndy$$

מעתה נוכל לבחור בין שתי שיטות לחישוב הסירקולציה סביב עקום סגור, ה"ישנה" באמצעות אינטגרל הסירקולציה או ה"חדשה" באמצעות אינטגרל הרוטור (משפט גרין), כפי שמראה הדוגמה שבעמוד הבא.

דוגמה – אישוש תיאורמת גרין:

אשש את גרסת ה<u>סירקולציה–רוטור</u> של תיאורמת גרין עבור השדה $\vec{F}_{(x,y)} = (x-y)\hat{x} + x\hat{y}$ והאזור R אשר

תחום במעגל היחידה $0 \le t \le 2\pi$, $C:\ r_{(t)} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y}$

<u>פיתרון</u>

חישוב הסירקולציה <u>לאורך</u> עקום סגור כפי שלמדנו בפרק "עבודה וזרימה":

$$\textit{Circulation of } (F = M\hat{x} + N\hat{y}) \textit{ around } C = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \oint_C Mdx + Ndy \quad (\textit{Flow integral})$$

$$\vec{F}_{(x,y)} = (x-y)\hat{x} + x\hat{y} \quad => \quad \vec{F}_{(\cos t,\sin t)} = (\cos t - \sin t)\hat{x} + (\cos t)\hat{y}$$

$$M = \cos t - \sin t \quad , \quad N = \cos t \quad , \quad \begin{cases} x = \cos t & => \quad dx = -\sin t\,dt \\ y = \sin t & => \quad dy = \cos t\,dt \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \oint_C Mdx + Ndy = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t)dt + \cos t\cos t\,dt =$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} (-\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \left(1 - \frac{\sin 2t}{2}\right)dt =$$

$$= \left[t + \frac{\cos 2t}{4}\right|_0^{2\pi} = \left[2\pi + \frac{1}{4} - \left(0 + \frac{1}{4}\right)\right] = 2\pi$$

כעת חישוב הסירקולציה <u>לאורך</u> עקום סגור באמצעות אינטגרל הרוטור (תיאורמת גרין):

$$\textit{Circulation of } (F = M\hat{x} + N\hat{y}) \textit{ along } C = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy \quad (\textit{Curl integral})$$

$$\vec{F}_{(x,y)} = (x-y)\hat{x} + (x)\hat{y} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M = x - y & => \quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = -1 \\ N = x & => \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy = \iint_R (1-(-1))dxdy = 2\iint_R dxdy =$$

$$= 2 \cdot \textit{unit circle area} = 2\pi$$

קיבלנו את אותה התוצאה בשתי הדרכים והשתכנענו שאפשר להמיר את אינטגרל הסירקולציה באינטגרל הרוטור.

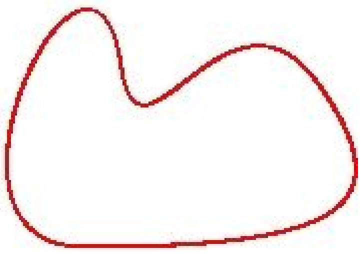
הנחות שהונחו בהסבר תיאורמת גרין

M , N ונגזרותיהם החלקיות הראשונות,

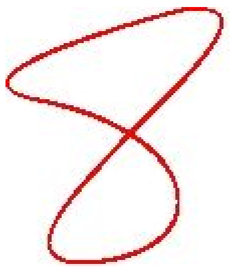
רציפות בתחום המכיל את C ואת R.

C עקום חלק וסגור <u>באופן פשוט</u>, שלאורכו

ניתן לבצע אינטגרציה של M ו- N.



עקום סגור באופן פשוט



עקום סגור

דוגמה – הערכת אינטגרל קווי באמצעות תיאורמת גרין

הערך את האינטגרל $\oint_C xy\,dy - y^2 dx$

כאשר C הוא הריבוע אשר תחום בצירי הקואורדינאטות והישרים $x = 1$ ו- $y = 1$.

פיתרון לפי גרסת ה<u>סירקולציה–רוטור</u> של תיאורמת גרין

$$\textit{Circulation of } (F = M\hat{x} + N\hat{y}) \textit{ around } C \;=\; \oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds \;=\; \oint_C M dx + N dy \quad (\textit{Flow integral})$$

$$\oint_C xy\,dy - y^2 dx \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} M = -y^2 \\ N = xy \end{matrix}$$

נשתמש באינטגרל הרוטור ובכך נפשט בהרבה את החישוב

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1\int_0^1 [y - (-2y)]dxdy = 3\int_0^1\int_0^1 ydydx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 y^2 \Big|_0^1 dx = \frac{3}{2}\int_0^1 dx = \frac{3}{2}x\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

פיתרון לפי גרסת ה<u>שטף–דיברגנץ</u> של תיאורמת גרין

$$\textit{Flux of } (F = M\hat{x} + N\hat{y}) \textit{ across } C \;=\; \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds \;=\; \oint_C M dy - N dx \quad (\textit{Flux integral})$$

$$\oint_C xy\,dy - y^2 dx \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} M = xy \\ N = y^2 \end{matrix}$$

נשתמש באינטגרל הדיברגנץ לפישוט החישוב

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1\int_0^1 (y + 2y)dxdy = \ldots = \frac{3}{2}$$

דוגמה – מציאת השטף כלפי חוץ

חשב את השטף כלפי חוץ של השדה $\vec{F}_{(x,y)} = x\hat{x} + y^2\hat{y}$ דרך הריבוע אשר תחום בישרים $x = \pm 1$ ו- $y = \pm 1$.

פיתרון

חישוב השטף באמצעות אינטגרל קווי ידרוש ארבע אינטגרציות, אחת לכל צלע של הריבוע. תיאורמת השטף–דיברגנץ של גרין מאפשרת לנו להמיר את האינטגרל הקווי לאינטגרל כפול יחיד – אינטגרל הדיברגנץ.

$$\textbf{Flux of } (F = M\hat{x} + N\hat{y}) \textbf{ across } C = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \oint_C Mdy - Ndx \quad (Flux\ integral)$$

$$\vec{F}_{(x,y)} = x\hat{x} + y^2\hat{y} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} M = x \\ N = y^2 \end{matrix}$$

כעת נשתמש באינטגרל הדיברגנץ לפישוט החישוב

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+2y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+2y)dydx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[y + y^2\Big|_{-1}^{1}\right]dx = \int_{-1}^{1}[2-(-1+1)]dx = 2x\Big|_{-1}^{1} = 4$$

חישוב שטח באמצעות תיאורמת גרין

כאשר עקום סגור באופן פשוט C והאזור R שהוא תוחם מקיימים את ההנחות שהוזכרו קודם, השטח של R ניתן לחישוב ע"פ הנוסחה הבאה

$$\textbf{Area of } R = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

להלן ההסבר

$$\textbf{Flux of } (F = M\hat{x} + N\hat{y}) \textbf{ across } C = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \oint_C Mdy - Ndx \quad (Flux\ integral)$$

מקרה פרטי

$$\textbf{Flux of } (F = x\hat{x} + y\hat{y}) \textbf{ across } C = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \oint_C xdy - ydx$$

נפשט באמצעות אינטגרל הדיברגנץ

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdy = \iint_R (1+1)dxdy = 2\iint_R dxdy =$$

$$= \textbf{Twice the area of } R$$