שטף דרך עקום סגור במישור

כדי למצוא את הקצב שבו נוזל נכנס (או יוצא) לאזור אשר תחום בעקום חלק $\boldsymbol{C}$ שבמישור $\boldsymbol{xy}$, אנו מחשבים את האינטגרל הקווי על פני $\boldsymbol{C}$ של $\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$, שהינו הרכיב הסקלארי של שדה המהירות אשר <u>מאונך</u> לעקום ופונה <u>כלפי חוץ</u>. ערכו של אינטגרל זה הוא השטף של $\vec{\boldsymbol{F}}$ דרך $\boldsymbol{C}$.

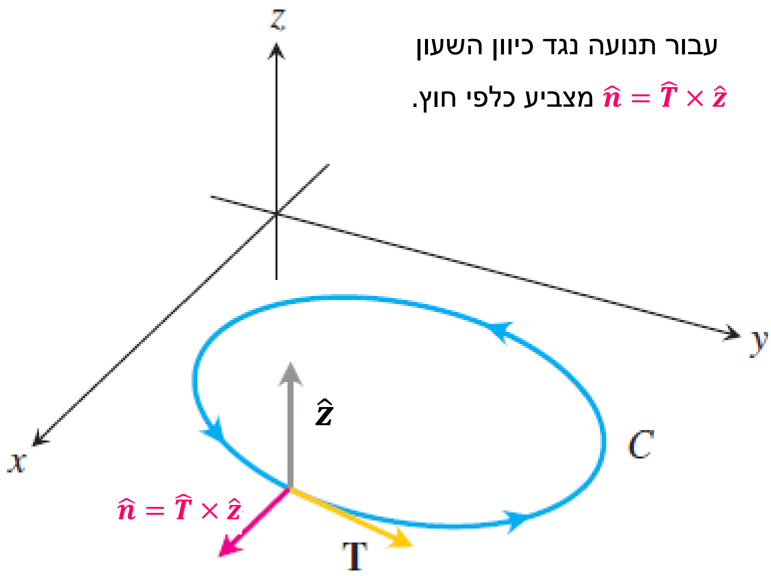
השטף דרך עקום סגור במישור, הגדרה:

אם $\boldsymbol{C}$ הוא עקום חלק ו<u>סגור</u> בתחום ההגדרה של שדה ווקטורי רציף $\vec{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{M}_{(x,y)}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{N}_{(x,y)}\hat{\boldsymbol{y}}$ במישור, ואם $\hat{\boldsymbol{n}}$ הוא ווקטור היחידה המאונך ל- $\boldsymbol{C}$ (הנורמל) ופונה כלפי חוץ, אז השטף של $\vec{\boldsymbol{F}}$ דרך $\boldsymbol{C}$ הינו

$$\boldsymbol{Flux\ of\ \vec{F}\ across\ C}\ =\int_C \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds$$

שים לב להבדל שבין שטף לסירקולציה. שטף הוא האינטגרל של רכיב $\vec{\boldsymbol{F}}$ אשר <u>מאונך</u> לעקום סגור, זה אשר "חותך את העקום". סירקולציה היא האינטגרל של רכיב $\vec{\boldsymbol{F}}$ אשר <u>משיק</u> לעקום סגור, זה אשר "זורם לאורך העקום".

כדי לחשב את אינטגרל השטף, יש להציג את העקום בצורה פרמטרית, $\boldsymbol{a}\le\boldsymbol{t}\le\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}_{(t)}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}_{(t)}$ כך שהעקום ייסרק <u>נגד כיוון השעון</u> בדיוק פעם אחת כאשר $\boldsymbol{t}$ גדל מ- $\boldsymbol{a}$ ל- $\boldsymbol{b}$.



$$\hat{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{T}}\times\hat{\boldsymbol{z}}=\left(\frac{dx}{ds}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{dy}{ds}\hat{\boldsymbol{y}}\right)\times\hat{\boldsymbol{z}}=$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ \boldsymbol{x'} & \boldsymbol{y'} & \boldsymbol{z'}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{vmatrix}=\frac{dy}{ds}\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{dx}{ds}\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{M}_{(x,y)}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{N}_{(x,y)}\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}=\frac{dy}{ds}\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{dx}{ds}\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{M}_{(x,y)}\frac{dy}{ds}-\boldsymbol{N}_{(x,y)}\frac{dx}{ds}$$

$$\int_C \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds=\int_C\left(\boldsymbol{M}\frac{dy}{ds}-\boldsymbol{N}\frac{dx}{ds}\right)ds\ =\oint_C \boldsymbol{M}dy-\boldsymbol{N}dx$$

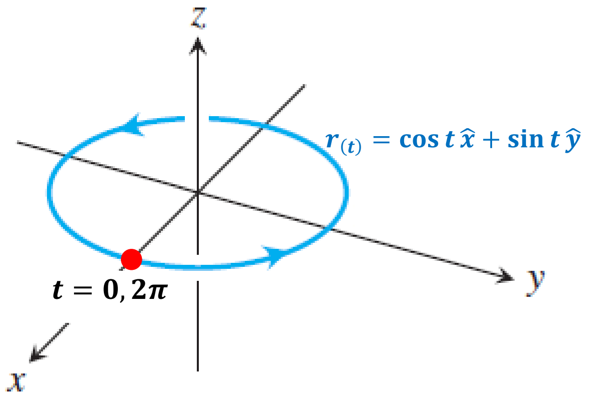
$\oint_C$ משמעו שהעקום $\boldsymbol{C}$ הינו סגור.

כעת נותר לבטא את dx , $\boldsymbol{N}$, dy , $\boldsymbol{M}$ במונחים של $\boldsymbol{t}$ ולבצע אינטגרציה מ- $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{a}$ עד $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{b}$.

סיכום - חישוב השטף דרך עקום חלק ו<u>סגור</u> במישור $\boldsymbol{xy}$:

$$\boldsymbol{Flux\ of}\ \left(\vec{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{y}}\right)\ \boldsymbol{across\ C}\ =\oint_C \boldsymbol{M}dy-\boldsymbol{N}dx$$

את העקום יש להציג בצורה פרמטרית, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}_{(t)}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}_{(t)}$, $\boldsymbol{a}\le\boldsymbol{t}\le\boldsymbol{b}$ כך שייסרק <u>נגד כיוון השעון</u> בדיוק פעם אחת כאשר $\boldsymbol{t}$ גדל מ- $\boldsymbol{a}$ ל- $\boldsymbol{b}$.



דוגמה לחישוב השטף דרך מעגל:

מצא את השטף של

$$\vec{F} = (x-y)\hat{x} + x\hat{y}$$

דרך המעגל

$$x^2 + y^2 = 1$$

פיתרון:

הפרמטריזציה $0 \le t \le 2\pi$, $r_{(t)} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y}$ סורקת את המעגל $x^2 + y^2 = 1$ נגד השעון בדיוק פעם אחת.

$$\hat{r}_{(t)} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y} \quad => \quad \begin{cases} x = \cos t & => \quad dx = -\sin t\,dt \\ y = \sin t & => \quad dy = \cos t\,dt \end{cases}$$

$$\vec{F}_{(x,y,z)} = (x-y)\hat{x} + x\hat{y} \qquad => \qquad \begin{cases} M = x - y = \cos t - \sin t \\ N = x = \cos t \end{cases}$$

$$Flux\ of\ (\vec{F} = M\hat{x} + N\hat{y})\ across\ C = \oint_C M\,dy - N\,dx =$$

$$= \oint_C (\cos t - \sin t)\cos t\,dt - \cos t\,(-\sin t\,dt) = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right|_0^{2\pi} = \pi$$

השטף של F דרך העקום <u>הסגור</u> (המעגל) הינו π. זהו סך הזרימה אשר <u>**בוקעת** מהעקום הסגור</u> במאונך לו.

לו הייתה מתקבלת תוצאה בעלת סימן שלילי, הייתה זו זרימה "נכנסת" במקום "בוקעת".

נזכור כי סך הזרימה <u>**לאורך** העקום הסגור</u> הנ"ל נקראת סירקולציה, ובמקרה דנן שווה 2π (ראה הדוגמה בפרק הקודם).