אינטגרל הזרימה

$$\boldsymbol{Definition\ of\ work\ integral\ rewritten}:\quad W=\int_{t=a}^{t=b}\vec{F}\cdot\hat{T}ds$$

במקום שדה כוח, $\vec{F}$ יכול לייצג <u>שדה מהירות</u> של נוזל אשר זורם דרך איזור במרחב.
במקרה זה, האינטגרל של $\vec{F}\cdot\vec{T}$ לאורך עקום חלק מניב את זרימת הנוזל לאורך העקום <u>במקביל לו</u>.
את אינטגרל הזרימה מחשבים באותו האופן שבו מחשבים את אינטגרל העבודה.

אינטגרל הזרימה וסירקולציה, הגדרה:

אם $\vec{r}_{(t)}$ הוא עקום חלק בתחום ההגדרה של שדה מהירות רציף $\vec{F}$, הזרימה <u>לאורכו</u> של העקום מ- $t=a$ עד $t=b$ הינה

$$Flow=\int_{t=a}^{t=b}\vec{F}\cdot\hat{T}ds=\int_{t=a}^{t=b}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{a}^{b}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt=\int_{a}^{b}\vec{F}\cdot\vec{v}dt$$

האינטגרל במקרה זה מכונה "אינטגרל הזרימה". אם העקום הוא לולאה סגורה, הזרימה מכונה "סירקולציה סביב העקום".

המכפלה הסקלארית $\vec{F}\cdot\hat{T}ds$ היא למעשה הכפלתו של רכיב המהירות <u>המקביל לעקום</u> ($F_{\parallel}$) בקטע קצרצר של עקום (ds),
ושווה לקצב הזרימה לאורכו של אותו קטע קצרצר: $\vec{F}\cdot\hat{T}ds=F_{\parallel}ds=dFlow$
אינטגרציה של $dFlow$ לאורך המסלול כולו מניבה את $Flow$ - הזרימה לאורך העקום כולו במקביל לו.

כדי לחשב את אינטגרל הזרימה לאורך מסלול חלק $\vec{r}_{(t)}$ נלך בדרך שבה הלכנו כשחישבנו את אינטגרל העבודה:

א. נבטא את $\vec{F}$ על העקום כפונקציה של הפרמטר t
ב. נמצא את $\frac{d\vec{r}}{dt}$, ז"א את **המהירות** $\vec{v}_{(t)}$ (יש להבחין בין מהירות זו, שהינה רעיונית, לבין מהירות הזרימה שמייצג $\vec{F}$).
ג. נחשב אינטגרל של $\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$, "הספק הזרימה" כביכול, מ-$t=a$ עד $t=b$ ונקבל את הזרימה.

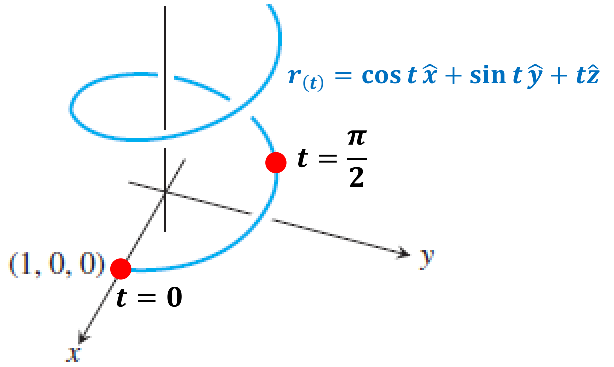
דוגמה לחישוב הזרימה לאורכו של עקום לולייני

שדה המהירות של נוזל הינו

$$\vec{F}=x\hat{x}+z\hat{y}+y\hat{z}$$

חשב את הזרימה לאורכו של העקום הלולייני

$$\vec{r}_{(t)}=\cos t\,\hat{x}+\sin t\,\hat{y}+t\hat{z}\quad,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$



פיתרון:

$$\vec{r}_{(t)} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y} + t\hat{z} \qquad => \qquad (\text{מהירות})\ \vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y} + \hat{z}$$

$$\vec{F}_{(x,y,z)} = x\hat{x} + z\hat{y} + y\hat{z} \qquad => \qquad (\text{שדה מהירות על העקום})\ \vec{F}_{(\cos t, \sin t, t)} = \cos t\,\hat{x} + t\hat{y} + \sin t\,\hat{z}$$

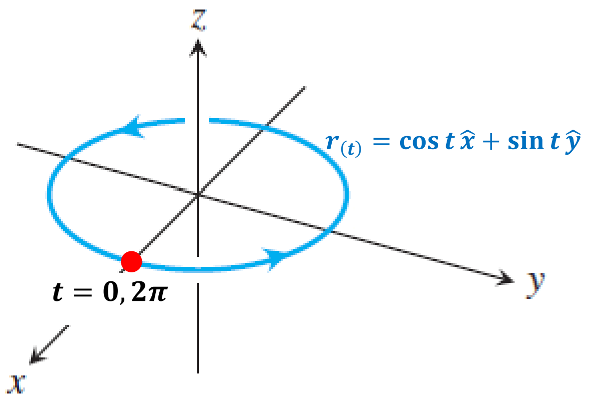
$$(\text{" הספק זרימה"})\ P_{(t)} = \vec{F}_{(t)} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\cos t + t\cos t + \sin t$$

$$Flow = \int_0^{\pi/2} (-\sin t\cos t + t\cos t + \sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin 2t}{2}\right)dt + \int_0^{\pi/2} t\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt$$

$$= \left[\frac{\cos 2t}{4} + t\sin t + \cos t - \cos t\right|_0^{\pi/2} = \left[\frac{\cos 2t}{4} + t\sin t\right|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi - 1}{2}$$

קיבלנו את הזרימה על הקטע הנתון של העקום הלולייני במקביל לו.

דוגמה לחישוב הסירקולציה סביב מעגל:



שדה המהירות של נוזל הינו

$$\vec{F} = (x - y)\hat{x} + x\hat{y}$$

חשב את הסירקולציה סביב המעגל

$$\vec{r}_{(t)} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

פיתרון:

$$\vec{r}_{(t)} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y} \qquad => \qquad (\text{מהירות})\ \vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y}$$

$$\vec{F}_{(x,y)} = (x - y)\hat{x} + x\hat{y} \qquad => \qquad (\text{שדה מהירות על העקום})\ \vec{F}_{(\cos t, \sin t)} = (\cos t - \sin t)\hat{x} + \cos t\,\hat{y}$$

$$(\text{"הספק הזרימה"})\ P_{(t)} = \vec{F}_{(t)} \cdot \vec{v}_{(t)} = -\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t = 1 - \frac{\sin 2t}{2}$$

$$Flow = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin 2t}{2}\right)dt = \left[t + \frac{\cos 2t}{4}\right|_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right) = 2\pi$$

קיבלנו את סך הזרימה על המעגל במקביל לו.