נתון כי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$, כמו כן עבור פונקציה מורכבת

$g(t)=f(t^2-4,t^4-t^3-4t^2+4t)$ מתקיים $g'(2)=g'(-2)=4$. וקטור הגרדיאנט $\nabla f(0,0)$ הוא:

יש לבחור תשובה אחת:

- $(1,-\frac{1}{2})$
- $(2,-1)$
- $(-1,1)$
- $(2,-\frac{1}{2})$
- $(2,-2)$

Question 1

$$\begin{cases} u = t^2-4 & \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = 2t \\ v = t^4-t^3-4t^2+4t & \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 4t^3-3t^2-8t+4 \end{cases}$$

$$g'_{(t)} = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 2t\frac{\partial g}{\partial u} + (4t^3-3t^2-8t+4)\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$g'_{(2)} = 4\frac{\partial g}{\partial u} + 8\frac{\partial g}{\partial v} = 4\ (given) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} = 1$$

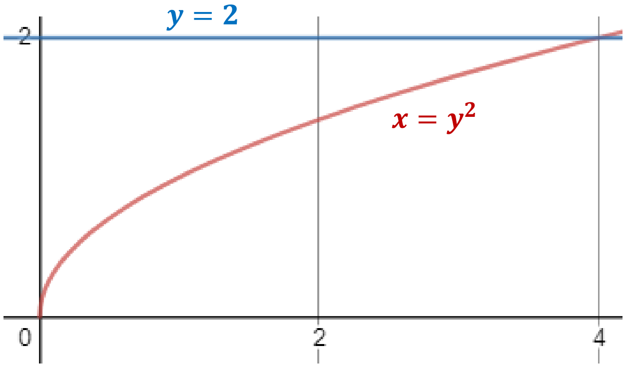
$$g'_{(-2)} = -4\frac{\partial g}{\partial u} - 24\frac{\partial g}{\partial v} = 4\ (given) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial u} + 6\frac{\partial g}{\partial v} = -1$$

$$\begin{cases} g_u + 2g_v = 1 \\ g_u + 6g_v = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad 4g_v = -2 \quad \Rightarrow \quad g_v = -\frac{1}{2} \quad , \quad g_u = 2$$

$$f_u = g_u = 2 \quad , \quad f_v = g_v = -\frac{1}{2}$$

$$f_{u(0,0)} = 2 \quad , \quad f_{v(0,0)} = -\frac{1}{2}$$

$$\vec{\nabla} f_{(0,0)} = 2\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}$$



Question 2

ערך האינטגרל $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin(y^3)\,dydx$ הוא:

יש לבחור תשובה אחת:

- $\frac{1}{3}\cos(8)$
- $\frac{1}{2}\cos(4)$
- $\frac{1}{3}(1-\cos(8))$
- 1
- $2\cos(8)$

כדאי להפוך את סדר האינטגרציה הנתון

$$\int_0^2\int_0^{y^2} \sin(y^3)\,dxdy = \int_0^2 dy\int_0^{y^2}\sin(y^3)\,dx = \int_0^2 dy\,\left[x\sin(y^3)\right|_0^{y^2} =$$

$$\int_0^2 y^2\sin(y^3)\,dy \quad\rightarrow\quad \begin{cases} t = y^3 \\ dt = 3y^2\,dy \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^2 3y^2\sin(y^3)\,dy = \frac{1}{3}\int_0^8 \sin(t)\,dt = -\frac{1}{3}\cos(t)\Big|_0^8 =$$

$$= -\frac{1}{3}[\cos(8)-1] = \frac{1}{3}[1-\cos(8)]$$

האינטגרל $\iiint\limits_{G}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$ כאשר $G=\left\{(x,y,z):\ 0\le x^2+y^2\le 4,\ -1\le z\le 2\right\}$ שווה:

יש לבחור תשובה אחת:

- $\frac{22\pi}{3}$
- 20π
- $\frac{21\pi}{4}$
- 12π
- 24π

Question 3

מדובר בגליל סביב ציר ה- $\boldsymbol{z}$ שרדיוסו $\boldsymbol{R}=\mathbf{2}$ וגובהו $\boldsymbol{H}=\mathbf{3}$. האינטגרנד הינו $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\boldsymbol{r}^2$.

נמלא את הגליל בקליפות גליליות סביב ציר ה- $\boldsymbol{z}$

$$d\boldsymbol{V}=\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{r}\boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}=\mathbf{6}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}\quad,\qquad \boldsymbol{\rho}_{(\boldsymbol{r})}d\boldsymbol{V}=\mathbf{6}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{r}^3d\boldsymbol{r}$$

$$\mathbf{6}\boldsymbol{\pi}\int_{0}^{2}\boldsymbol{r}^3d\boldsymbol{r}=\mathbf{6}\boldsymbol{\pi}\left[\frac{\boldsymbol{r}^4}{\mathbf{4}}\right|_{0}^{2}=\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\left[\boldsymbol{r}^4\right|_{0}^{2}=\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{16}=\mathbf{24}\boldsymbol{\pi}$$

אפשר גם באמצעות אינטגרל משולש:

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\boldsymbol{\rho}_{(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{\theta}d\boldsymbol{z}=\int_{-1}^{2}d\boldsymbol{z}\int_{0}^{2\pi}d\boldsymbol{\theta}\int_{0}^{2}\boldsymbol{r}^3d\boldsymbol{r}=\mathbf{4}\int_{-1}^{2}d\boldsymbol{z}\int_{0}^{2\pi}d\boldsymbol{\theta}=$$

$$=\mathbf{8}\boldsymbol{\pi}\int_{-1}^{2}d\boldsymbol{z}=\mathbf{24}\boldsymbol{\pi}$$

תהי $f(t)$ גזירה ב $\mathbb{R}$. נגדיר $u(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)$. האם קיים ערך של a עבורו מתקיים השיוויון :
$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2a$ לכל $x\neq 0,\ y\neq 0$?

יש לבחור תשובה אחת:

Question 4

- לא קיים
- 0
- -1
- 1
- לכל ערך של a

$$t=\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{y}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{df}{dt}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{df}{dt}\frac{1}{x}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{df}{dt}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+y\frac{df}{dt}\frac{1}{x}=-\frac{y}{x}\frac{df}{dt}+\frac{y}{x}\frac{df}{dt}=2a\ (given)$$

$$\Rightarrow \quad 0=2a \quad \Rightarrow \quad a=0$$

יעקוביאן $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ של ההצבה

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x^3} \end{cases}$$

Question 5

יש לבחור תשובה אחת:

- $-\left(\dfrac{x+3y}{x^4}\right)$
- $\dfrac{3y}{x^4}$
- $\dfrac{x+3y}{x^3}$
- $-\left(\dfrac{3y}{x^4}\right)$
- $\dfrac{x+3y}{x^4}$

$$\frac{D_{(u,v)}}{D_{(x,y)}} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-3y}{x^4} & \dfrac{1}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^3} + \frac{3y}{x^4} = \frac{x+3y}{x^4}$$

עבור אילו ערכים של פרמטר m עבודת הכח $\vec{F} = \left(xy^2 + 2mx,\ 4x^2y\right)$ לאורך העקומה $y = \sqrt{4-x}$ מהנקודה $(0,2)$ אל הנקודה $(2,\sqrt{2})$ שווה ל 2 ?

יש לבחור תשובה אחת:

- 1
- $\frac{3}{4}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{2}$
- 2

Question 6

$$x_{(t)} = t \quad , \quad y_{(t)} = \sqrt{4-t} \quad , \quad 0 \le t \le 2 \quad =>$$

$$\vec{r}_{(t)} = t\hat{x} + \sqrt{4-t}\,\hat{y}$$

$$\vec{F}_{(t)on\,curv} = [t(4-t) + 2mt]\hat{x} + \left[4t^2\sqrt{4-t}\right]\hat{y} =$$

$$= \quad [2(m+2)t - t^2]\hat{x} + \left[4t^2\sqrt{4-t}\right]\hat{y}$$

$$\vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt} = 1\hat{x} - \frac{1}{2\sqrt{4-t}}\hat{y}$$

$$P_{(t)} = \vec{F}_{(t)} \cdot \vec{v}_{(t)} = [2(m+2)t - t^2]1 - \frac{4t^2\sqrt{4-t}}{2\sqrt{4-t}} = 2(m+2)t - t^2 - 2t^2 =$$

$$= 2(m+2)t - 3t^2$$

$$W = \int_0^2 P_{(t)}\,dt = \int_0^2 [2(m+2)t - 3t^2]\,dt = [(m+2)t^2 - t^3\Big|_0^2 = 4(m+2) - 8 =$$

$$= 4m = 2\ (given) \quad => \quad m = \frac{1}{2}$$

נתונה פונקציה $f(x,y)$ הרציפה בנקודה $(0,0)$. עבור $(x,y) \neq (0,0)$ היא מוגדרת ע"י הנוסחה

$f(x,y) = \frac{3x^2 + x^2y + 6y^2}{x^2 + 2y^2}$. הערך של $f(0,0)$ הוא:

יש לבחור תשובה אחת:

Question 7

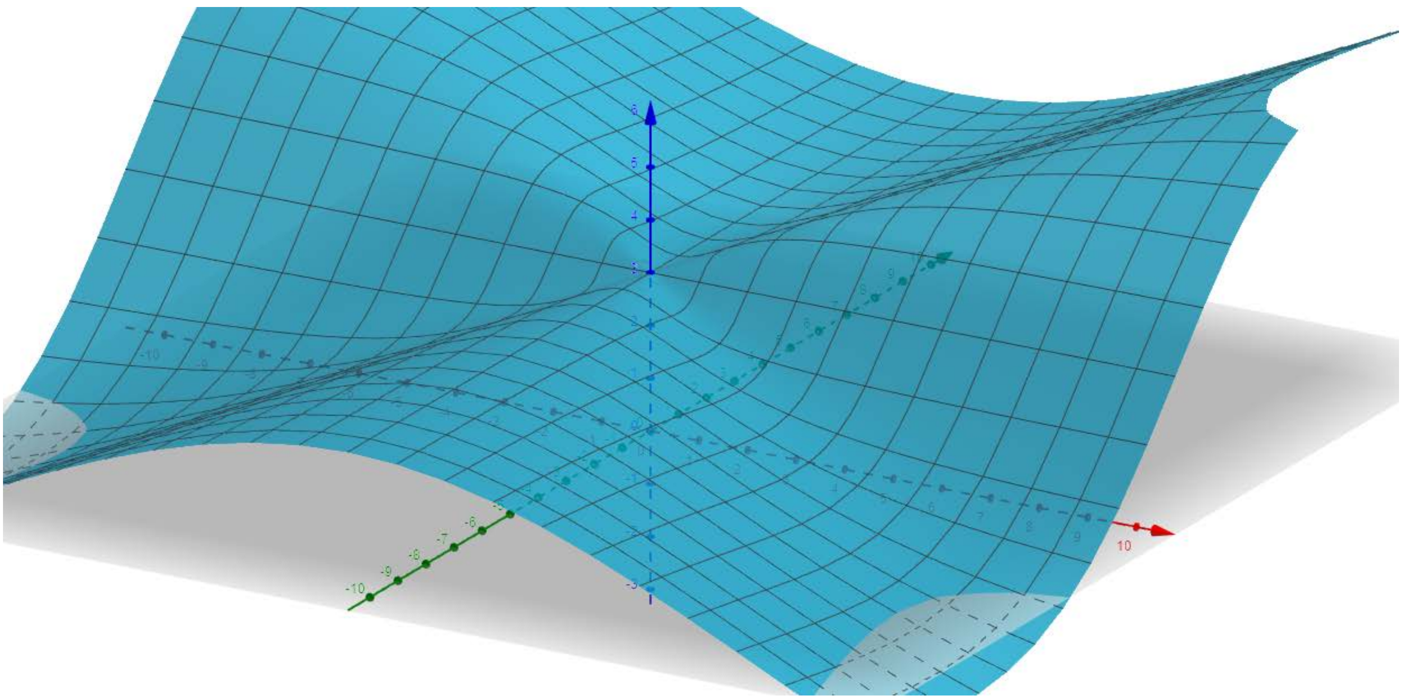
- 1
- 2
- 0
- 3
- -1

$$f_{(x,y)} = \frac{3(x^2+2y^2)+x^2y}{x^2+2y^2} = 3 + \frac{x^2y}{x^2+2y^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+2y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{kx^3}{x^2+2k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{(2k^2+1)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{2k^2+1} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_{(x,y)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(3 + \frac{x^2y}{x^2+2y^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 3 + \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+2y^2} = 3 + 0 = 3$$

$f_{(x,y)}$ *is continuous at* $(0,0)$ *(given)* $\Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_{(x,y)} = f_{(0,0)} = 3$



קו הגובה $c=9$ של $f(x,y)$ נתון ע"י המשוואה $x^2-10xy=-1$. מהו הערך של $f(1,1)$?

(א) 1 **(ב)** 9 **(ג)** -9 **(ד)** -1 **(ה)** 0

יש לבחור תשובה אחת:

Question 8

- 9
- 0
- -9
- 1
- -1

$$x^2-10xy=-1 \quad => \quad x^2-10xy+10=9 \quad => \quad f_{(x,y)}= \; x^2-10xy+10$$

$$f_{(1,1)}= \; 1$$

יהי P המישור המשיק למשטח $x^2e^{2y-z}=4$ בנקודה $(2,1,2)$. מהו שיעור ה - z של הנקודה בה P חותך את ציר ה z?

יש לבחור תשובה אחת:

Question 9

- -2
- 2
- -4
- 4
- 0

$$f_{(x,y,z)}= \; x^2e^{2y-z}$$

$$f_x= \; 2xe^{2y-z} \quad , \quad f_y= \; 2x^2e^{2y-z} \quad , \quad f_z= \; -x^2e^{2y-z}$$

$$f_{x(2,1,2)}= \; 4 \quad , \quad f_{y(2,1,2)}= \; 8 \quad , \quad f_{z(2,1,2)}= \; -4$$

$$f_{x(P_0)}(x-x_0)+f_{y(P_0)}(y-x_0)+f_{z(P_0)}(z-x_0)=0$$

$$4(x-2)+8(y-1)-4(z-2)=0 \quad \textit{is the tangent plain P}$$

$$4(0-2)+8(0-1)-4(z-2)=0 \quad => \quad 4(z-2)= \; -16 \quad => \quad z=-2$$

נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^2 + xy + ay^2, a \in \mathbb{R}$. עבור אילו ערכים של פרמטר a לפונקציה יש אינסוף נקודות קיצון מקומי ?

יש לבחור תשובה אחת:

- 0
- לא קיים a כזה
- $-\frac{1}{5}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{5}$

Question 10

$$f_{(x,y)} = x^2 + xy + ay^2$$

$$f_x = 2x + y$$

$$f_y = x + 2ay$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2ay = 0 \end{cases} \quad => \quad x - 4ax = 0 \quad => \quad x(4a - 1) = 0$$

עבור $a \neq \frac{1}{4}$ מתאפסות שתי הנגזרות החלקיות בראשית הצירים.

עבור $a = \frac{1}{4}$ מתאפסות שתי הנגזרות החלקיות בכל נקודה שעל הישר $y = -2x$.

$$f_{xx} = 2 \quad , \quad f_{xy} = 1 \quad , \quad f_{yy} = 2a$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 4a - 1$$

עבור $a > \frac{1}{4}$ מתקבל מינימום מקומי בראשית הצירים ועבור $a < \frac{1}{4}$ מתקבל שם אוכף.

עבור $a = \frac{1}{4}$ נדרשת חקירה נפרדת.

נחשב ערכה של f על הישר $y = -2x$ (הישר שבכל נקודה עליו מתאפסות שתי נגזרותיה החלקיות של f)

$$f_{(x,y)} = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \quad => \quad f_{(x,-2x)} = \left(x + \frac{-2x}{2}\right)^2 = 0$$

ובכן, על הישר $y = -2x$ הפונקציה f מתאפסת ומשני צדדיו היא חיובית.

אם כך ישנן לאורכו <u>אינסוף נקודות מינימום</u> (שערכן אפס).

מי מהמשטחים הבאים חותך את המישור $x = 2$ בפרבולה?

יש לבחור תשובה אחת:

- ○ $\frac{z^2}{4} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + 1$
- ○ $-\frac{z^2}{25} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$
- ○ $\frac{z}{2} = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$
- ○ $\frac{z^2}{4} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1$
- ○ $-\frac{z^2}{2} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$

Question 11

$$\frac{z}{2} = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \quad => \quad z = \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

$$x = 2 \quad => \quad z = \frac{2}{9}2^2 - \frac{1}{2}y^2 \quad => \quad z = \frac{8}{9} - \frac{1}{2}y^2$$

אורך העקומה γ הנתונה ע"י:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = \sqrt{2}t - 2 \\ z(t) = \ln t \end{cases} \quad t \in [1,2]$$

הוא:

יש לבחור תשובה אחת:

- ○ $\frac{3}{2}$
- ○ $\frac{1}{2} + 2\ln 2$
- ○ $\frac{3}{2} + \ln 2$
- ○ $\frac{3}{2} + \ln 3$
- ○ $\frac{1}{2} + \ln 3$

Question 12

$$\vec{r}_{(t)} = \frac{t^2}{2}\hat{x} + \left(\sqrt{2}t - 2\right)\hat{y} + ln(t)\hat{z}$$

$$\vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt} = t\hat{x} + \sqrt{2}\hat{y} + \frac{1}{t}\hat{z} \quad => \quad \left|\vec{v}_{(t)}\right| = \sqrt{t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(t^2+1)^2}{t^2}} = \frac{t^2+1}{t} = t + \frac{1}{t} \quad , \quad dr = \left|\vec{v}_{(t)}\right| dt = \left(t + \frac{1}{t}\right)dt$$

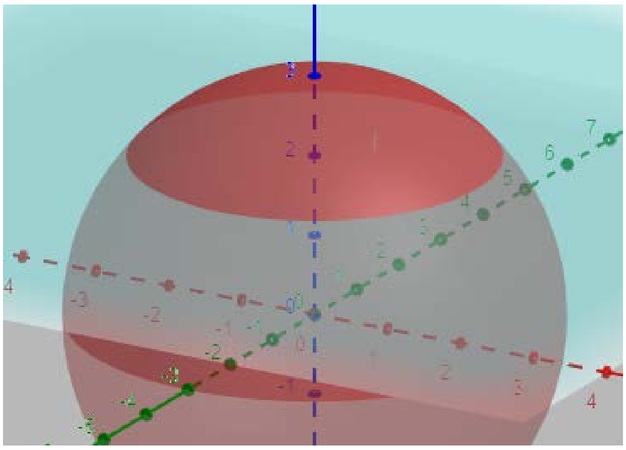
$$L_\gamma = \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} + ln(t)\right|_1^2 = 2 + ln2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + ln2$$

נפח הגוף החסום מלמטה ע"י $z = 2$ ומלמעלה ע"י הספרה $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ הוא:

יש לבחור תשובה אחת:

- $\frac{9\pi}{4}$
- 2π
- 4π
- $\frac{8\pi}{3}$
- $\frac{11\pi}{3}$

Question 13



מדובר בנפח ה"כיפה" שבולטת מעל המישור האופקי $z = 2$.

אפשר למלאו בדיסקות אופקיות שרדיוסן

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 - z^2}$$

ועוביין dz. נפחה של דיסקה הוא מכפלת שטחה בעובייה

$$dV = \pi r^2 dz = \pi(9 - z^2)dz$$

אינטגרציה מ- $z = 2$ עד $z = 3$ תניב את הנפח המבוקש.

$$\pi \int_2^3 (9 - z^2)dz = \pi \left[9z - \frac{z^3}{3}\Big|_2^3\right] = \pi\left[27 - 9 - \left(18 - \frac{8}{3}\right)\right] = \frac{8\pi}{3}$$

או באמצעות אינטגרל משולש:

$$\int_2^3 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{9-z^2}} r dr = \int_2^3 dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{9-z^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 dz \int_0^{2\pi} (9 - z^2)d\theta = \frac{1}{2}\int_2^3 dz \ \left[(9 - z^2)\theta\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{2}\int_2^3 (9 - z^2)dz = \ldots..$$

נתונה הפונקציה: $f(x,y) = y^2 \cdot \ln x$ הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$ בנקודה $P(1,4)$
בכיוון הווקטור $\underline{\mathbf{a}} = -3\underline{\mathbf{i}} + 3\underline{\mathbf{j}}$ היא :

יש לבחור תשובה אחת:

- $-\frac{8}{\sqrt{2}}$
- $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- $-\frac{16}{\sqrt{2}}$
- -48
- $\frac{6}{\sqrt{2}}$

Question 14

גודלו של $\vec{a}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

כיוונו של $\vec{a}$

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-3\hat{x} + 3\hat{y}}{\sqrt{18}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}$$

הנגזרות החלקיות של $f = y^2 ln(x)$ ב- $P(1,4)$

$$f_{x(1,4)} = \frac{y^2}{x}\bigg|_{(1,4)} = 16$$

$$f_{y(1,4)} = 2y ln(x)\bigg|_{(1,4)} = 0$$

הגרדיאנט של f ב- $P(1,4)$

$$(\vec{\nabla} f)_{(1,4)} = 16\hat{x}$$

הנגזרת של f בנקודה $P(1,4)$ בכיוון של $\vec{a}$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{a},(1,4)} = (\vec{\nabla} f)_{(1,4)} \cdot \hat{a} = (16\hat{x} + 0\hat{y}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}\right) = -\frac{16}{\sqrt{2}} + 0$$

הגבולות החוזרים של הפונקציה: $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ כאשר $(x,y)\to(0,0)$ הם:

Question 15

יש לבחור תשובה אחת:

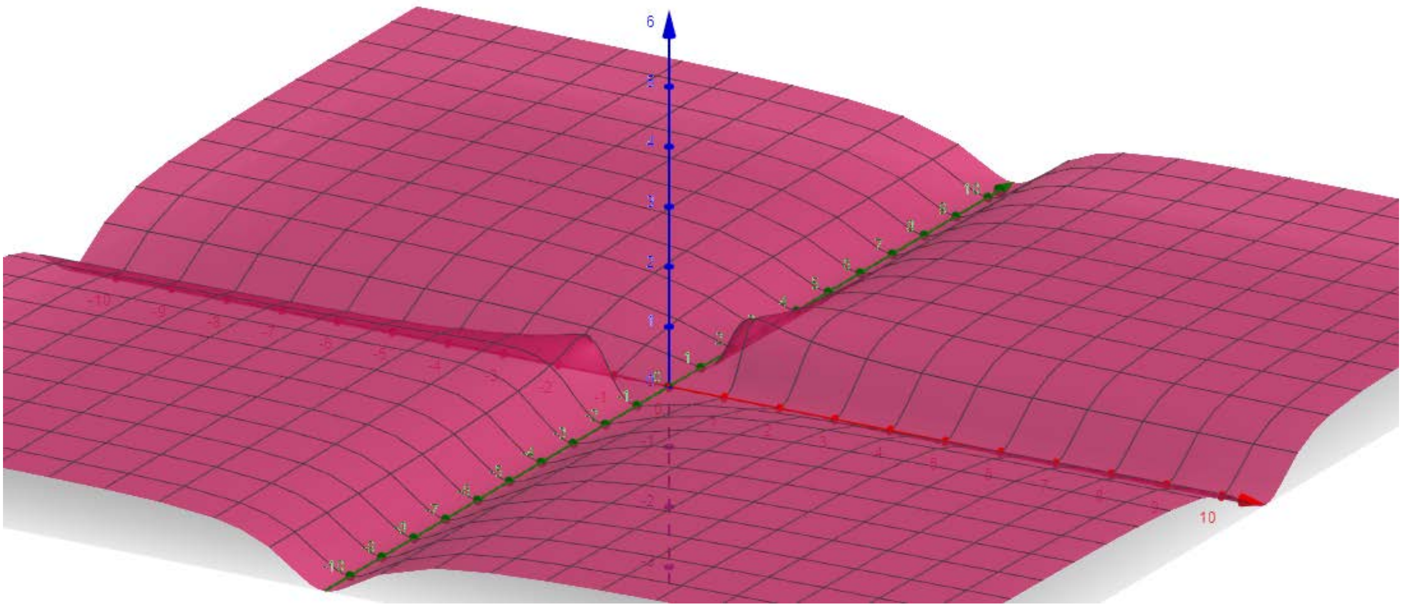
- $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}f(x,y)\right)=0$, $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)$ **לא קיים**
- $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}f(x,y)\right)$ **לא קיים** , $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)=1$
- $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}f(x,y)\right)=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)=0$
- **לא קיימים**
- $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}f(x,y)\right)=0,\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)=0$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to0} f_{(x,y)} = \lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = y^2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = 0}$$

$$\boldsymbol{\lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0} f_{(x,y)}\right] = \lim_{y\to0}[0] = 0}$$

$$\boldsymbol{\lim_{y\to0} f_{(x,y)} = \lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = x^2\lim_{y\to0}\frac{y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = 0}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0} f_{(x,y)}\right] = \lim_{x\to0}[0] = 0}$$



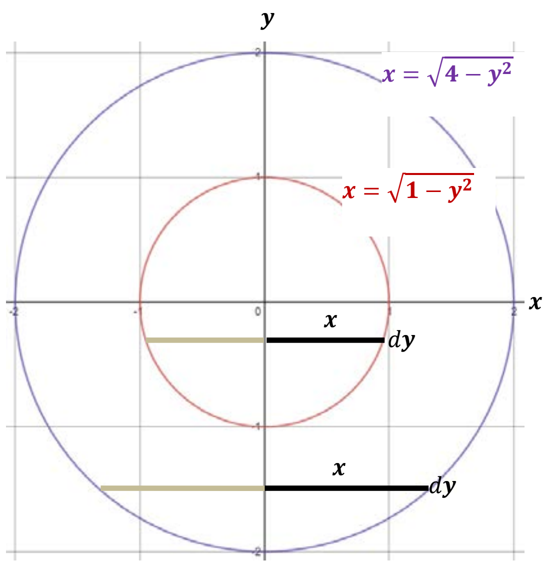
מסת התחום $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x^2+y^2 \le 4, y \le 0\right\}$ בעל הצפיפות $\rho(x,y) = y^2$ היא:

Question 16

יש לבחור תשובה אחת:

- ○ $\frac{1}{8}$
- ○ π
- ○ $\frac{15\pi}{8}$
- ○ $\frac{2\pi}{3}$
- ○ 8

מדובר במסת השטח שבין שני המעגלים מתחת לציר ה- x.
אפשר לחשב את מסת חצי העיגול הגדול ולהפחית ממנה את מסת חצי העיגול הקטן. צפיפות המסה ρ תלויה כאן רק במשתנה y
כך שמפתה לחלק את השטח למלבנים מקבילים לציר ה- x בעלי מסה dm ולבצע אינטגרציה אחת בלבד לפי y.
בנוסף, מאחר ו- ρ תלוי בריבועו של y, זהה מסת השטח שמעל לציר ה- x לזו שמתחתיו כך שאפשר לחשב את הראשונה אם מעדיפים.



$$dm_{(y)} = \rho_{(y)} dA = y^2 x dy$$

עבור העיגול הגדול $dm_{(y)} = y^2\sqrt{4-y^2}dy$

עבור העיגול הקטן $dm_{(y)} = y^2\sqrt{1-y^2}dy$

אבל האינטגרל דורש הצבה טריגונומטרית ואינו פשוט כ"כ לחישוב,
אז נוותר על דרך זו ונלך על אינטגרל כפול בקואורדינאטות קוטביות.

$$\rho = y^2 = r^2 sin^2\theta \quad , \quad dA = rdrd\theta \quad => \quad \rho dA = r^3 sin^2\theta drd\theta$$

$$M = \iint_D \rho dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 r^3 sin^2\theta drd\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} sin^2\theta d\theta \left[r^4\right|_1^2 = \frac{15}{4}\int_0^{\pi} sin^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{15}{8}\int_0^{\pi}[1-\cos(2\theta)]d\theta = \frac{15}{8}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{15}{8}[\pi - 0 - (0)] = \frac{15\pi}{8}$$

נגזרת חלקית $f_x(0,0)$ של הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+3y^2}{3\sin^2 x+2y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

היא:

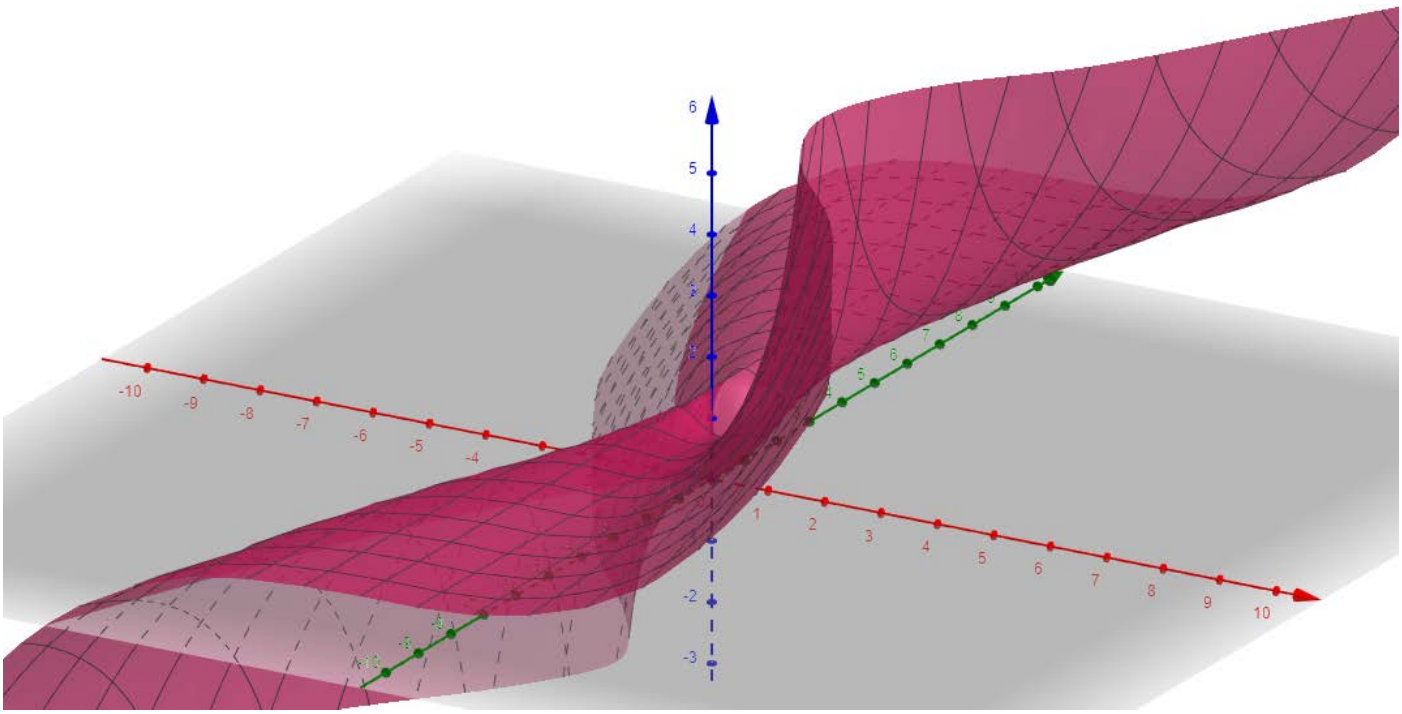
יש לבחור תשובה אחת:

- 1
- $\frac{3}{2}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{3}$
- 0

Question 17

$$\frac{f_{(\Delta x.0)}-0}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{2(\Delta x)^3+3\cdot 0^2}{3sin^2(\Delta x)+2\cdot 0^2} = \frac{2(\Delta x)^2}{3sin^2(\Delta x)} = \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta x}{\sin(\Delta x)}\right)^2$$

$$f_{x(0,0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_{(\Delta x.0)}-0}{\Delta x} = \frac{2}{3}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\sin(\Delta x)}\right)^2 = \frac{2}{3}(1)^2 = \frac{2}{3}$$



מסת העקומה γ הנתונה ע"י:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = e^{t/2} \\ y(t) = \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad t \in [0, \ln 3]$$

בעלת הצפיפות $\rho(x,y) = x^2$ היא:

Question 18

יש לבחור תשובה אחת:

- $\frac{1}{4}(1-\sqrt{2})$
- $\frac{1}{3}(\sqrt{8}-\sqrt{2})$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{3}(8-2\sqrt{2})$
- $\frac{1}{3}$

$$\gamma: \ \vec{\boldsymbol{r}}_{(\boldsymbol{t})} = \boldsymbol{e}^{t/2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{2}}\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{t})} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}_{(\boldsymbol{t})}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{e}^{t/2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\hat{\boldsymbol{y}} \quad => \quad \left|\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{t})}\right| = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\sqrt{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{1}}$$

$$d\boldsymbol{r} = \left|\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{t})}\right|\boldsymbol{dt} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\sqrt{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{1}}\,d\boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}} \quad => \quad \textit{on the curve } \boldsymbol{\gamma} \textit{ we have } \ \boldsymbol{\rho} = \left(\boldsymbol{e}^{t/2}\right)^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}$$

$$d\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\rho} d\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}\sqrt{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{1}}\,d\boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{M}_{\gamma} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{ln3}} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}\sqrt{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{1}}\,d\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\int_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{4}} \sqrt{\boldsymbol{u}}\,d\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\left[\boldsymbol{u}^{3/2}\right|_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\left(\boldsymbol{8}-\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{2}}\right)$$

הנקודה בה מתקבל מקסימום מוחלט של הפונקציה: $f(x,y) = x^2 - 2y^2$
בכפוף לאילוץ $x + y = 1$ היא :

יש לבחור תשובה אחת:

- $(0,1)$
- $(0.5,0.5)$
- $(2,-1)$
- $(1,0)$
- $(-1,2)$

Question 19

$$f_{(x,1-x)} = x^2 - 2(1-x)^2 = -x^2 + 4x - 2$$

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = 2 \quad => \quad (2,-1)$$

תחת האילוץ $x + y = 1$ המקסימום המוחלט של f מתקבל בנקודה $(2,-1)$ וערכו 2.

הגבול של הפונקציה: $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ כאשר $(x,y) \to (0,0)$ שווה :

יש לבחור תשובה אחת:

- 2
- 0
- 1
- לא קיים
- ∞

Question 20

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y) \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\left(\frac{1}{y}\right) =$$

$$= 0 \cdot bounded \cdot bounded = 0$$