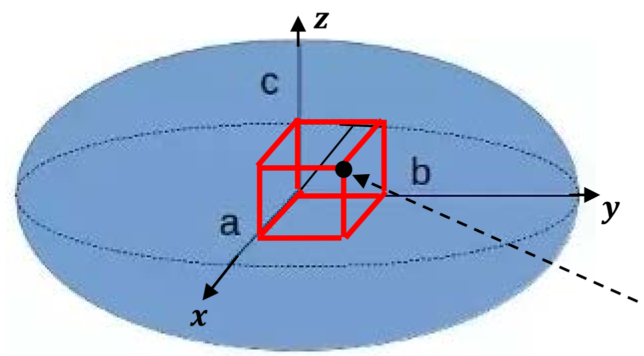

מצא את נפח התיבה המקסימלית שתוכל לתחום בתוך

האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ כך שפאותיה

יהיו מקבילות לצירים x, y ו z.

הנקודה $P(x,y,z)$ נמצאת על משטח האליפסואיד

נחשב את הנפח $(V = xyz)$ של שמינית תיבה - זו אשר מעל הרביע הראשון (ראה ציור), ולסוף נכפול בשמונה.

אנו מחפשים את ערכי הקיצון של $f_{(x,y,z)} = xyz$ תחת האילוץ $g_{(x,y,z)} = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

נחפש את ערכיהם של x y ו- z אשר מקיימים את משוואת הגרדיינט $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ואת המשוואה $g_{(x,y,z)} = 0$.

פתרון משוואת הגרדיינט:

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z} = \lambda\left(\frac{2x}{a^2}\hat{x} + \frac{2y}{b^2}\hat{y} + \frac{2z}{c^2}\hat{z}\right)$$

$$\begin{cases} yz = \lambda \frac{2x}{a^2} \\ xz = \lambda \frac{2y}{b^2} \\ xy = \lambda \frac{2z}{c^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = \lambda \frac{2x}{a^2} \\ xz = \lambda \frac{2y}{b^2} \end{cases} \quad => \quad \frac{y}{x} = \frac{x}{a^2}\frac{b^2}{y} \quad => \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad => \quad y = \frac{b}{a}x$$

$$\begin{cases} yz = \lambda \frac{2x}{a^2} \\ xy = \lambda \frac{2z}{c^2} \end{cases} \quad => \quad \frac{z}{x} = \frac{x}{a^2}\frac{c^2}{z} \quad => \quad z^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 \quad => \quad z = \frac{c}{a}x$$

<u>הערה</u>: חילקתי המשוואות זו בזו כי כאן $\lambda = 0$ גורר $x \text{ or } y \text{ or } z = 0$, ואנו יודעים שהנקודה אותה אנו מחפשים אינה על מי משלושת מישורי הצירים.

נציב אם כן $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$ ו- $z^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2$ במשוואה $g_{(x,y,z)} = 0$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad => \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{\frac{b^2}{a^2}x^2}{b^2}+\frac{\frac{c^2}{a^2}x^2}{c^2}=1 \quad => \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}=1 \quad =>$$

$$=> \quad 3\cdot\frac{x^2}{a^2}=1 \quad => \quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{3} \quad => \quad \frac{x}{a}=\sqrt{\frac{1}{3}} \quad => \quad x=\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot a$$

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot a = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot b$$

$$z = \frac{c}{a}x = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot a = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot c$$

הערך המרבי שמקבלת $f_{(x,y,z)} = xyz$ על האילוץ $g_{(x,y,z)} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ הוא :

$$f_{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\, a,\sqrt{\frac{1}{3}}\, b,\sqrt{\frac{1}{3}}\, c\right)} = \sqrt{\frac{1}{3}}\, a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}\, b \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}\, c = \frac{\sqrt{3}}{9} abc$$

מצאנו את נפחה של שמינית תיבה (השמינית שמעל הרביע הראשון), לכן נכפול כעת בשמונה:

$$V_{max} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot abc \approx 1.54 \cdot abc$$

הערה: מדובר כאן בפונקציית נפח $V_{(x,y,z)}$ שהינה ארבע-ממדית, ולכן הגרדיינט הינו במרחב התלת ממדי x, y, z .