

אתה ניצב על גבעה שצורתה $z = 500 - 0.003x^2 - 0.004y^2$

בנקודה $p = (-100, -100, 430)$

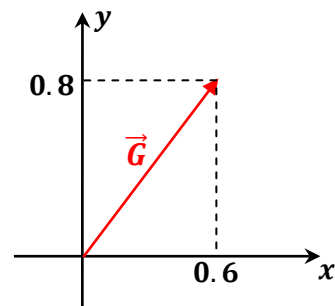
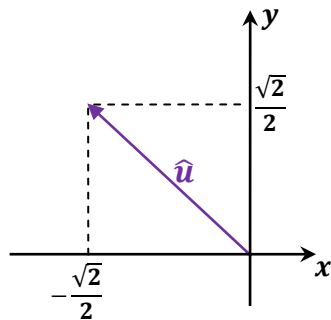
מה יהיה קצב עלייתך תוך כדי תנועה לכיוון צפון מערב?

תשובה:

(מטר גובה/מטר צעד)

ראשית נחשב את הגרדיינט בנקודה $(-100, -100, 430)$:

$$\vec{V}_{z(x,y)} = -0.006x\hat{x} - 0.008y\hat{y} \Rightarrow \vec{V}_{z(-100,-100)} = 0.6\hat{x} + 0.8\hat{y}$$



כעת נכפול את ווקטור הגרדיינט \vec{G} בווקטור הכיוון צפון-מערב \hat{u} :

$$\vec{G} \cdot \hat{u} = (0.6\hat{x} + 0.8\hat{y}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{4\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 0.14 \text{ m/m}$$

כעת לשאלה המשלבת גרדיאנט עם כלל השרשרת:

הראה כי הגרדיאנט של V בקואורדינטות קרטזיות (x, y) הוא הנגזרת של V לפי r בכיוון r , כלומר $\vec{\nabla}V_{(x,y)} = \frac{dV}{dr}\hat{r}$

המשמעות: גודל שדהו החשמלי של מטען כדורי הוא הנגזרת לפי r של הפוט' החשמלי שלו, שהרי $\vec{E} = -\vec{\nabla}V_{(x,y)}$

$$\begin{cases} r\cos\theta = x & \Rightarrow & \frac{x}{r} = \cos\theta & \Rightarrow & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \\ r\sin\theta = y & \Rightarrow & \frac{y}{r} = \sin\theta & \Rightarrow & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta \\ r_{(x,y)} = \sqrt{x^2+y^2} & \Rightarrow & \frac{\partial r_{(x,y)}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta & , & \frac{\partial r_{(x,y)}}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}V_{(x,y)} = \frac{\partial V_{(x,y)}}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V_{(x,y)}}{\partial y}\hat{y} = \frac{\partial V_{(r)}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r_{(x,y)}}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V_{(r)}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r_{(x,y)}}{\partial y}\hat{y} =$$

$$= \frac{\partial V_{(r)}}{\partial r} \cdot \cos\theta \hat{x} + \frac{\partial V_{(r)}}{\partial r} \cdot \sin\theta \hat{y} = \frac{\partial V}{\partial r} (\cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y}) = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r}$$