תרגיל בנושא כופלי לגרנז' שליאור ביקש שאפתור

הטמפרטורה בנקודה (x,y) על לוח מתכת היא $T_{(x,y)} = 4x^2 - 4xy + y^2$.

נמלה מטיילת על הלוח במסלול מעגלי שרדיוסו 5 ומרכזו בראשית.

מהי הטמפרטורה הגבוהה ביותר והנמוכה ביותר שהיא חווה?

פיתרון: אנו מחפשים את ערכי הקיצון של $T_{(x,y)} = 4x^2 - 4xy + y^2$ תחת האילוץ $g_{(x,y)} = x^2 + y^2 - 25 = 0$.

נמצא את ערכיהם של x , y ו- λ אשר מקיימים את משוואת הגרדיינט $\vec{\nabla} T = \lambda \vec{\nabla} g$ ואת המשוואה $g_{(x,y)} = 0$.

פתרון משוואת הגרדיינט: $\vec{\nabla} T = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad (8x - 4y)\hat{x} + (-4x + 2y)\hat{y} = \lambda(2x\hat{x} + 2y\hat{y})$

$$\begin{cases} 8x - 4y = 2\lambda x \\ -4x + 2y = 2\lambda y \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} 4x - 2y = \lambda x \\ -4x + 2y = 2\lambda y \end{cases} \quad => \quad \lambda(x + 2y) = 0 \quad => \quad x = -2y \quad , \quad \lambda = 0$$

ראשית ניקח את הפיתרון $x = -2y$ ונציבו במשוואת האילוץ :

$$(-2y)^2 + y^2 - 25 = 0 \quad => \quad y^2 = 5 \quad => \quad y_{1,2} = \pm\sqrt{5} \quad => \quad \left(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \quad , \quad \left(2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$$

נציב את שני הפתרונות ב- $T_{(x,y)} = 4x^2 - 4xy + y^2$ ונקבל:

$$T_{(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})} = 4 \cdot 20 + 40 + 5 = 125° \quad , \quad T_{(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})} = 4 \cdot 20 + 40 + 5 = 125°$$

כעת ניקח את $\lambda = 0$ (שמשמעו הוא $\vec{\nabla} T = 0$, ז"א נקודה/ות שבה/ן $T_{(x,y)}$ אינה משתנה ללא קשר לאילוץ זה או אחר):

$$4x - 2y = \lambda x \quad => \quad 4x - 2y = 0 \quad => \quad y = 2x$$

כעת נציב את הפיתרון $y = 2x$ במשוואת האילוץ :

$$x^2 + (2x)^2 - 25 = 0 \quad => \quad x^2 = 5 \quad => \quad x = \pm\sqrt{5} \quad => \quad y = 2\left(\pm\sqrt{5}\right) \quad => \quad y_1 = 2\sqrt{5} \quad , \quad y_2 = -2\sqrt{5}$$

$$\left(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right) \quad , \quad \left(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}\right)$$

נציב את שני הפתרונות ב- $T_{(x,y)} = 4x^2 - 4xy + y^2$ ונקבל :

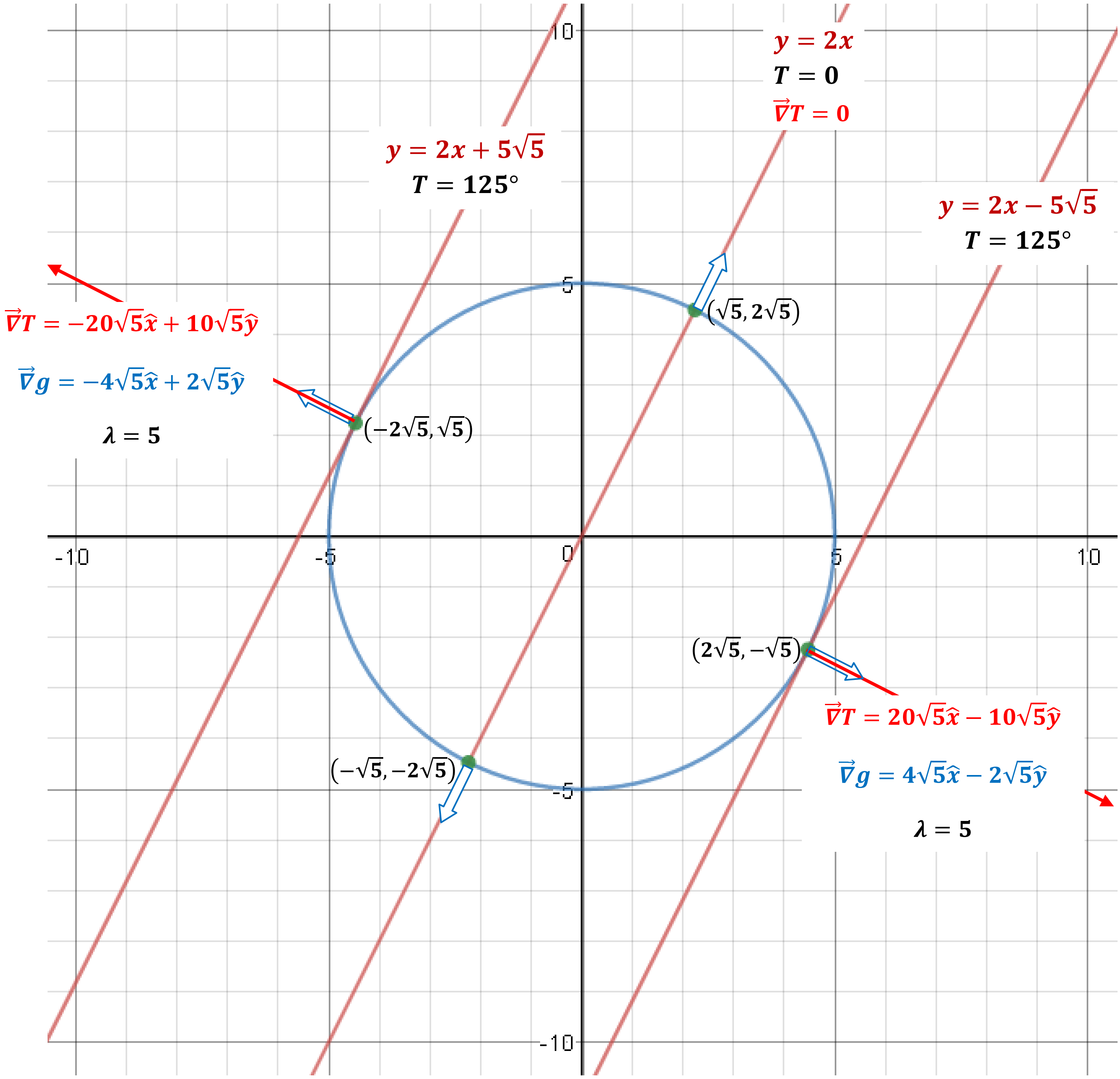
$$T_{(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})} = 4 \cdot 5 - 40 + 20 = 0° \quad , \quad T_{(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})} = 4 \cdot 5 - 40 + 20 = 0°$$

לסיכום, הטמפרטורה הגבוהה ביותר שחווה הנמלה היא $125°$ (אש) והנמוכה ביותר היא $0°$ שזה קר בלי מעיל.

הטמפרטורה בנקודה (x, y) על לוח מתכת היא $T_{(x,y)} = 4x^2 - 4xy + y^2$.

נמלה מטיילת על הלוח במסלול מעגלי שרדיוסו **5** ומרכזו בראשית.

מהי הטמפרטורה הגבוהה ביותר והנמוכה ביותר שהיא חווה?



$T_{(x,y)} = 4x^2 - 4xy + y^2$ לעולם אינה שלילית - **0** הוא **ערך המינימום** שלה אשר מתקבל על קו הרמה $y = 2x$.

לראיה: $T_{(x,2x)} = 4x^2 - 4x(2x) + (2x)^2 = 0$

זהו מינימום בצורת תעלה (לא שקע כיפתי) ואם כך $\vec{\nabla}T$ מתאפס באינסוף הנקודות שבתחתיתה (הישר $y = 2x$).

בכתיב מתמטי: $\vec{\nabla}T_{(x,2x)} = 0$.

מתוך ארבע הנקודות שהתקבלו בתהליך האנליטי, שתיים שוכנות בתחתית התעלה הנ"ל ולכן $\vec{\nabla}T = 0$ בהן.

כעת מובן מדוע התקבל עבורן $\lambda = 0$, הרי רק כך תוכל משוואת הגרדיינט להתקיים בהן:

$$\vec{\nabla}T_{(x,2x)} = \lambda\vec{\nabla}g_{(x,2x)} \;=>\; 0 = \lambda\vec{\nabla}g_{(x,2x)} \;=>\; \lambda = 0 \quad , \quad [\vec{\nabla}g_{(x,y)} \neq 0 \;\; (g_{(x,y)}\ is\ a\ paraboloid)]$$

בשתי הנקודות האחרות שהתקבלו, $\vec{\nabla}T \neq 0$, ואם כך הוא מוכרח להתלכד עם $\vec{\nabla}g$ (ראה באיור לעיל).

<u>באיור מתחת</u>: לאורך הישר $y = 2x$ מתקיים $T = 0$. בכל נקודה שאינה על ישר זה, $0 < T$.

הנמלה עוברת בכל הנקודות שמקיימות $x^2 + y^2 = 25 \;\; => \;\; g = 0$.

שתיים מהן מקיימות גם $y = 2x$ כך שמתקבל בהן $T = 0$ - מינימום מוחלט "טבעי" $(f_x = f_y = 0)$ של T.

ברם, משוואת הגרדיינט תקפה **בכל** נקודת קיצון שעל אילוץ, גם אם היא "טבעית", כך ש- $\vec{\nabla}T$ ו- $\vec{\nabla}g$ מוכרחים להתלכד גם בה. כיצד יעשו זאת כאשר כיווניהם מאונכים זה לזה (ראה איור לעיל)?

באמצעות איפוסו של λ אשר מביא לאיפוסו של $\vec{\nabla}T$. ווקטור אשר שווה ל- **0** מתלכד עם כל ווקטור אחר!