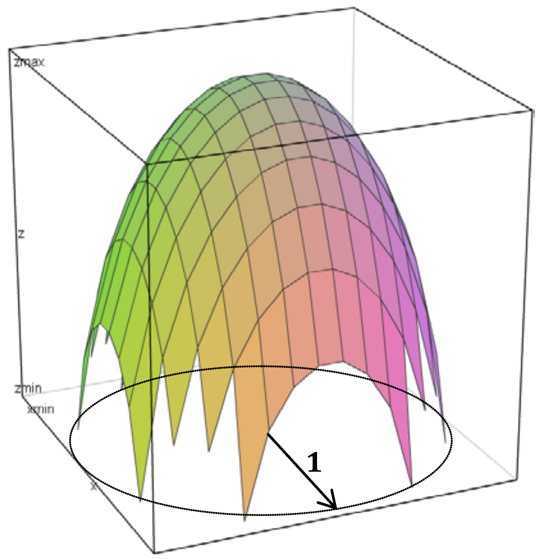


חשב את נפח הגוף המוגדר על ידי $\int\int_R \sqrt{1-x^2-y^2}\,dA$

R הוא התחום במישור xy הנחתך ע"י הגוף.

איפוס הפונקציה מניב: $R: \quad x^2+y^2=1$

$$\iint_R \sqrt{1-(x^2+y^2)}\,dA = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}\sqrt{1-r^2}\cdot r\cdot dr\cdot d\alpha$$

$$u=1-r^2 \quad => \quad du=-2rdr \quad , \quad \begin{cases} r=0 \to u=1 \\ r=1 \to u=0 \end{cases}$$

$$\int\sqrt{1-r^2}\cdot r\cdot dr = -\frac{1}{2}\int\sqrt{1-r^2}\cdot(-2r\cdot dr) = -\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\cdot du$$

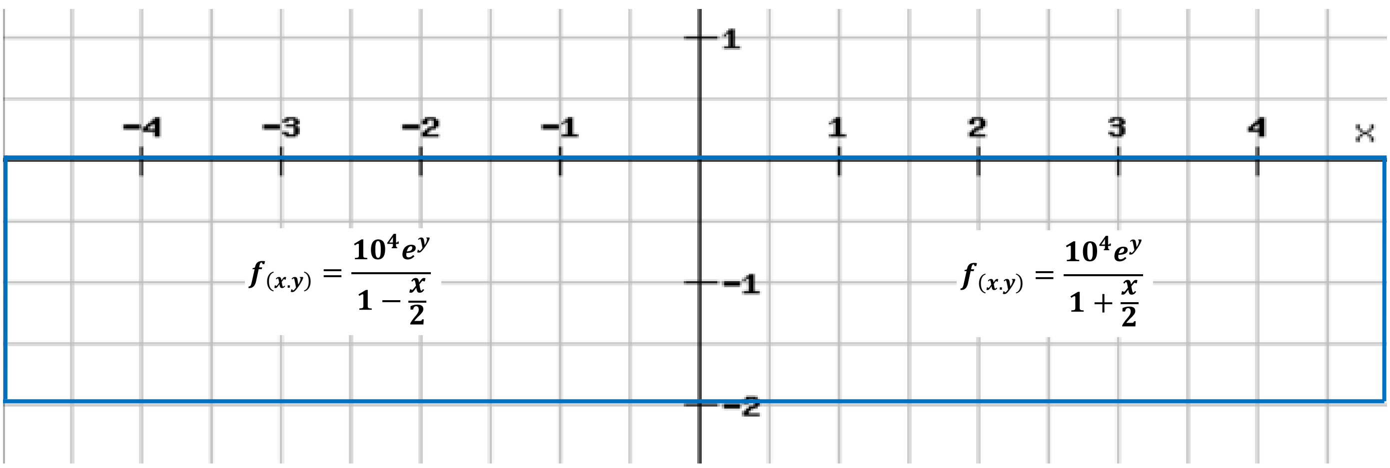
$$\int_{r=0}^{r=1}\sqrt{1-r^2}\cdot r\cdot dr = -\frac{1}{2}\int_{u=1}^{u=0}\sqrt{u}\cdot du = \frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=1}\sqrt{u}\cdot du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}\sqrt{1-r^2}\cdot r\cdot dr\cdot d\alpha = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi}\frac{1}{3}d\alpha = \frac{1}{3}\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi}d\alpha = \frac{1}{3}\alpha\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}\ \textit{Cubic Units}$$

הביטוי $f(x,y)=\dfrac{10{,}000e^y}{1+\frac{|x|}{2}}$ מתאר צפיפותם של חיידקים במישור xy כאשר x ו- y נמדדים בסנטימטרים.

מה מספרם הכולל של החיידקים במלבן $-5\le x\le 5$, $-2\le y\le 0$.

חיידקים



נכפול את הצפיפות ביחידת שטח קטנטנה $dx \cdot dy$ ונקבל את מספר החיידקים שעל אותה יחידת שטח קטנטנה:

$$x < 0 \ : \ f_{(x.y)} = \frac{10^4 e^y}{1 - \frac{x}{2}} \cdot dx \cdot dy \qquad , \qquad 0 < x \ : \ f_{(x.y)} = \frac{10^4 e^y}{1 + \frac{x}{2}} \cdot dx \cdot dy$$

אינטגרציה של כל יחידות השטח הקטנטנות, כל אחת והחיידקים שעליה, תניב את סך החיידקים שבתחום:

$$x < 0 \ : \ \int_{y=-2}^{y=0} \int_{x=-5}^{x=0} \frac{10^4 e^y}{1 - \frac{x}{2}} \cdot dx \cdot dy \qquad , \qquad 0 < x \ : \ \int_{y=-2}^{y=0} \int_{x=0}^{x=5} \frac{10^4 e^y}{1 + \frac{x}{2}} \cdot dx \cdot dy$$

<u>$x < 0$</u>

$$\int_{x=-5}^{x=0} \frac{10^4 e^y}{1 - \frac{x}{2}} \cdot dx = -2 \cdot 10^4 e^y \int_{-5}^{0} \frac{1}{x-2} \cdot dx = -2 \cdot 10^4 e^y \, ln|x-2| \Big|_{-5}^{0} = -2 \cdot 10^4 e^y \, ln\frac{2}{7} = 2 \cdot 10^4 e^y \, ln\frac{7}{2}$$

$$\int_{y=-2}^{y=0} \int_{x=-5}^{x=0} \frac{10^4 e^y}{1 - \frac{x}{2}} \cdot dx \cdot dy = \int_{y=-2}^{y=0} 2 \cdot 10^4 e^y \, ln\frac{7}{2} \cdot dy = 2 \cdot 10^4 ln\frac{7}{2} \int_{-2}^{0} e^y dy =$$

$$= 2 \cdot 10^4 ln\frac{7}{2} e^y \Big|_{-2}^{0} = 2 \cdot 10^4 ln\frac{7}{2}(1 - e^{-2}) = 2 \cdot 10^4 (1 - e^{-2}) \cdot ln3.5$$

<u>$0 < x$</u>

$$\int_{x=0}^{x=5} \frac{10^4 e^y}{1 + \frac{x}{2}} \cdot dx = 2 \cdot 10^4 e^y \int_{0}^{5} \frac{1}{x+2} \cdot dx = 2 \cdot 10^4 e^y \, ln(x+2) \Big|_{0}^{5} = 2 \cdot 10^4 e^y \, ln\frac{7}{2}$$

$$\int_{y=-2}^{y=0} \int_{x=0}^{x=5} \frac{10^4 e^y}{1 + \frac{x}{2}} \cdot dx \cdot dy = \int_{y=-2}^{y=0} 2 \cdot 10^4 e^y \, ln\frac{7}{2} \cdot dy = \dots\dots = 2 \cdot 10^4 (1 - e^{-2}) \cdot ln3.5$$

אנו רואים שמספר החיידקים בחצי השמאלי של התחום זהה לזה שבחצי הימני שלו.

מספר החיידקים הכולל שבתחום הוא אם כך: $\mathbf{4 \cdot 10^4 (1 - e^{-2}) \cdot ln3.5}$