חשב את נפח הגוף הכלוא מתחת ליריעה $f_{(x,y)} = x^2y^2$ **ומעל** לשטח המוגבל ע"י העקומות

$xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 2x$ -ו ברביע הראשון.

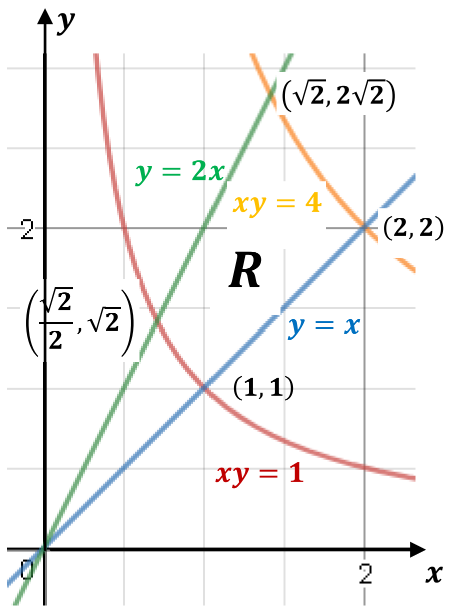
נתון: $\iint_R f_{(x,y)}\,dxdy = \iint_S g_{(u,v)} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$

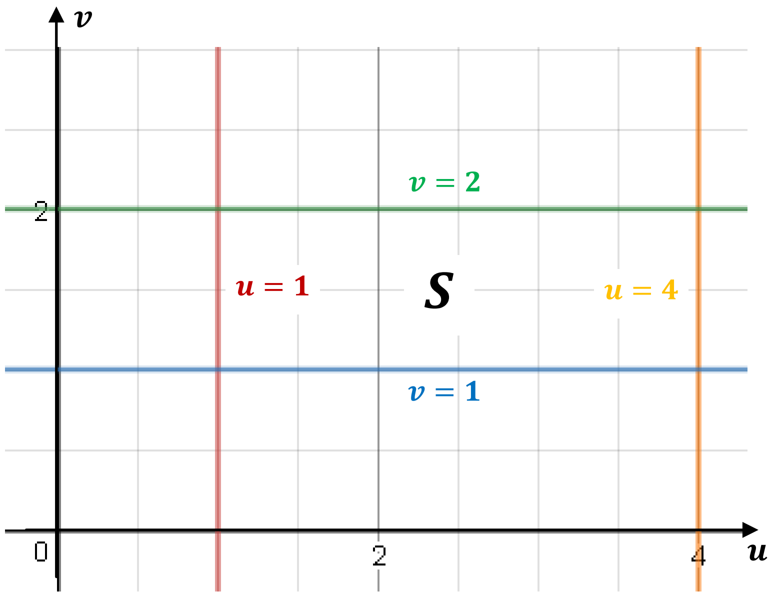
פיתרון:

נפתור את המערכת $v = \frac{y}{x}$, $u = xy$ עבור x ו- y , במונחים של u ו- v :

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{u}{v} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{u}{v}} \quad , \quad y = v \cdot x = v \cdot \sqrt{\frac{u}{v}} \Rightarrow y = \sqrt{vu}$$

משוואות uv מפושטות	משוואות uv עבור הגבולות של G	משוואות xy עבור הגבולות של R
$u = 1$	$\sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \sqrt{vu} = 1$	$xy = 1$
$u = 4$	$\sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \sqrt{vu} = 4$	$xy = 4$
$v = 2$	$\sqrt{vu} = 2\sqrt{\frac{u}{v}}$	$y = 2x$
$v = 1$	$\sqrt{vu} = \sqrt{\frac{u}{v}}$	$y = x$





$$J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \Rightarrow J_{(u,v)} = \frac{\frac{1}{v}}{2\sqrt{\frac{u}{v}}} \cdot \frac{u}{2\sqrt{vu}} - \frac{v}{2\sqrt{vu}} \cdot \frac{\frac{-u}{v^2}}{2\sqrt{\frac{u}{v}}} = \frac{u}{4uv} + \frac{u}{4uv} = \frac{1}{2v}$$

$$\iint_R x^2y^2\,dxdy = \iint_S u^2\frac{1}{2v}dudv = \frac{1}{2}\iint_S u^2\frac{1}{v}dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{v}dv\int_1^4 u^2du = \frac{1}{6}\int_1^2\frac{1}{v}dv\cdot\, u^3\Big|_1^4 = \frac{1}{6}\int_1^2\frac{1}{v}dv\cdot(64-1) =$$

$$= \frac{63}{6}\int_1^2\frac{1}{v}dv = \frac{63}{6}\ln v\Big|_1^2 = \frac{63}{6}\ln 2 \quad \textit{Cubic Units}$$